

Un contributo al dibattito sui fondamenti della Meccanica Quantistica: le statistiche intermedie di Giovanni Gentile Jr.

*Arcangelo Rossi**

Riassunto

Si deve a Giovanni Gentile junior (1906-1942) la prima seria messa in discussione della ripartizione esclusiva delle particelle quantistiche identiche in due sole distribuzioni statistiche possibili: quella di Bose-Einstein, con numero massimo di occupazione infinito di uno stesso stato energetico semplice, e quella di Fermi-Dirac, con numero massimo di occupazione di tale stato pari invece ad uno. Egli prese infatti in considerazione una diversa distribuzione statistica in cui su ogni livello energetico semplice possa esserci al massimo un numero finito maggiore di 1 di particelle identiche, in contrasto con i postulati fondamentali della teoria quantistica stessa. Ciò costringerebbe, com'è già stato precisato nel 1953 da N. Green, ad una generalizzazione dell'attuale teoria quantistica dei campi. In ogni caso G. Gentile junior ritenne che le sue statistiche con numero massimo finito maggiore di 1 di occupazione di uno stato fossero applicabili a particelle quantistiche il cui numero sia, a differenza dei fotoni, determinato. In particolare al cosiddetto 'condensato di Bose-Einstein' (intuito dallo stesso Einstein fin dal 1924 e identificato poi sperimentalmente per la prima volta nel 1938 da F. London), costituito da molecole di gas che, in opportune condizioni di temperatura e pressione, condensano più di quanto previsto dalla teoria classica delle transizioni di fase. La nuova trattazione statistica riusciva in modo più diretto ed elegante di quella di Bose-Einstein a riprodurre le formule empiriche di London, precisando anche l'andamento dei calori specifici con la temperatura nel processo di condensazione, e anticipava così le ricerche che solo recentemente hanno ripreso ad occuparsi del fenomeno, oltre che, più in generale, della stessa possibilità di formulare statistiche intermedie del tipo di quelle di Gentile. Scopo del presente lavoro è quindi l'inquadramento del contributo innovativo di Gentile nella sua concezione filosofico-critica della fisica, considerata nella sua originalità e al tempo stesso nella sua consonanza con le idee filosofiche del padre G. Gentile senior, il massimo teorico del neoidealismo italiano tra le due guerre mondiali.

Il quadro ortodosso

Tra le condizioni strutturali, inedite rispetto alla tradizione classica, che la meccanica quantistica sembra introdurre nello studio del mondo fisico, ve ne sono alcune che attengono alla coesistenza in uno stesso stato energetico semplice delle particelle materiali di una stessa specie. La meccanica quantistica, nella sua formulazione standard, contempla infatti, com'è noto, due sole possibili distribuzioni statistiche delle particelle identiche soggette alla condizione fondamentale di indistinguibilità: quella ricavata da Bose ed Einstein per le particelle che non soddisfano al principio di esclusione di Pauli, e quella ricavata da Fermi e Dirac per quelle che invece vi soddisfano¹. Nel primo caso un numero infinito di particelle identiche può occupare uno stesso stato definito di energia semplice o non degenerare; nel secondo caso invece un tale stato energetico può

* Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, Via per Arnesano, 73100 Lecce

essere occupato al più da una sola particella tra tutte quelle di uno stesso tipo. Si noti bene che l'esclusività di tale ripartizione è strettamente legata alla formulazione standard e non appartiene ad esempio affatto alla vecchia teoria dei quanti di Bohr-Sommerfeld, peraltro anteriore alla formulazione, tra il 1924 e il 1925, delle due statistiche quantistiche². La funzione di stato ψ di un sistema di particelle identiche mantiene il suo valore per scambio di coordinate (di posizione e di spin) per coppie di particelle, ed è dunque simmetrica, nel caso dei bosoni, mentre, per effetto della stessa operazione, si trasforma nel suo opposto, ed è quindi antisimmetrica, nel caso dei fermioni. Di conseguenza, nel primo caso più particelle possono coesistere nello stesso stato, mentre nel secondo caso questo può essere occupato al più da una sola particella. A tale proposito, fu Dirac a dimostrare che le funzioni ψ antisimmetriche sono proprie delle particelle fermioniche soggette al principio di esclusione mentre quelle simmetriche sono proprie dei bosoni non soggetti al principio di esclusione. Come è noto però l'antisimmetria è un principio più generale del principio di esclusione, che era stato formulato da W. Pauli nel 1925 per singoli elettroni all'interno di un atomo e faceva riferimento esclusivamente ai quattro numeri quantici che li possono caratterizzare distintamente, e non alle più generali proprietà di simmetria che, indipendentemente dalle circostanze fisiche, portano appunto ad escludere che due elettroni qualsiasi possano avere tutti i loro numeri quantici uguali. Infatti essa vincola tutte le particelle a spin semintero di uno stesso tipo ad essere sempre soggette al principio di esclusione a prescindere dalle circostanze fisiche del sistema. Essa inoltre porta a postulare l'esistenza di forze di scambio - che Fermi considerò in particolare esaustive per spiegare la stabilità dell'atomo d'elio e della molecola d'idrogeno - introdotte proprio allo scopo di estendere la validità del principio di esclusione³. Anche la teoria quantistica dei campi, o di seconda quantizzazione, porta alla distinzione esclusiva tra fermioni e bosoni introducendo gli operatori di creazione e di distruzione di particelle in un certo stato. Tali operatori soddisfano regole di commutazione e anticommutazione, rispettivamente per i bosoni e i fermioni. Tramite questi operatori si può a sua volta definire l'operatore numero di occupazione i cui autovalori sono i numeri di occupazione di uno stato. Nel caso dei fermioni sono possibili due soli autovalori zero e uno, mentre per i bosoni gli autovalori possibili sono tutti gli interi fra zero e infinito⁴.

Statistiche gentiliane: teoria e basi empiriche

Ebbene, Giovanni Gentile junior per primo esplicitò la sua insoddisfazione rispetto a tale esclusiva ripartizione e propose nel 1940⁵ le cosiddette statistiche intermedie che sostanzialmente differiscono da quella di Bose-Einstein in quanto assumono che il numero massimo di particelle in un determinato stato quantico è finito ed è dato dal numero stesso delle particelle costituenti il sistema, laddove invece, come si è già detto, nella formula di Bose-Einstein tale numero è infinito. In questo caso quindi, dato un numero finito complessivo di posti disponibili comunque superiore ad uno, il fatto che un certo stato sia già occupato da altre particelle diminuisce progressivamente la probabilità che una particella si disponga in quello stato, mentre così non è nelle due statistiche quantistiche standard, in base alle quali ad ogni livello o vi è un numero infinito di posti ancora liberi (Bose-Einstein) o non ve n'è alcuno (Fermi-Dirac), se quello stato è comunque già occupato. Comunque Gentile non riconosce la

validità della limitazione alle due statistiche quantistiche standard, affermando che la condizione propria della statistica di Bose-Einstein, che non vi sia limite al numero di occupazione di uno stato da parte delle particelle quantistiche non soggette al principio di esclusione, può valere solo per particelle affatto particolari come i fotoni, il cui numero è indeterminato. Un gas fotonico infatti varia continuamente di numero di particelle componenti perchè i fotoni sono continuamente emessi o assorbiti dalle pareti che eventualmente lo contengano o comunque dai corpi con cui esso interagisce. In tutti gli altri casi le particelle non soggette al principio di esclusione dovrebbero invece corrispondere ad una statistica intermedia diversa dalle altre due note, dal momento che il numero di occupazione è finito, corrispondendo al numero effettivo di particelle identiche, che in generale si conserva, in accordo con la stessa meccanica quantistica standard. Ma ciò sembra sostenibile solo se si continua a concepire l'osservabile numero di occupazione come numero di oggetti materiali effettivi, cui applicare il calcolo delle probabilità secondo la concezione classica o semmai la vecchia teoria dei quanti di Bohr-Sommerfeld delle particelle elementari. Ma la nuova meccanica concepisce diversamente, già nella sua prima formulazione in termini di osservabili e di matrici di Heisenberg, tale numero come autovalore che, nel caso delle particelle non soggette al principio di esclusione, può assumere tutti i valori interi compresi fra zero e infinito, per cui vale comunque per esse la statistica di Bose-Einstein. Un risultato questo che la seconda quantizzazione in termini di operatori di creazione e di distruzione di particelle, il cui numero non è più quindi considerato fisso, non fa che rafforzare. Le funzioni d'onda di particelle che ubbidissero alle statistiche intermedie proposte da Gentile non avrebbero in ogni caso le proprietà di simmetria di cui godono le particelle bosoniche⁶. E' stato tuttavia mostrato da N. B. Green che è possibile riformulare la teoria quantistica dei campi introducendo regole di commutazione diverse da quelle usuali e tali da dare quindi luogo a funzioni di stato diverse da quelle bosoniche e da quelle fermioniche, tanto che gli autovalori del numero di occupazione possano essere numeri interi positivi qualsiasi, in accordo con le statistiche intermedie di Gentile ribattezzate ora parastatistiche. Le difficoltà di questa riproposta consistono, oltre che nella maggiore complessità delle formule tendenti a generalizzare la teoria quantistica dei campi, nell'assenza di evidenze sperimentali non ambigue relative all'esistenza di particelle che obbediscano alle parastatistiche o statistiche gentiliane⁷. Tuttavia per Gentile queste appaiono in generale applicabili alle particelle di quei gas degeneri (o non classici) cui non sono applicabili le formule di Bose-Einstein in quanto il loro numero di occupazione tende al massimo a coincidere con quello delle stesse molecole costituenti il gas. E' il caso del cosiddetto "condensato di Bose-Einstein" di cui, sia pure sul piano puramente teorico, Gentile si occupò approfonditamente⁸ e che solo molto di recente è stato ripreso in più attenta considerazione dai ricercatori anche sul piano strettamente sperimentale⁹. In esso, l'attrazione reciproca tra particelle bosoniche tende alla saturazione, e rende quindi applicabili le statistiche gentiliane ad un gas degenero o non classico che si trova ad una temperatura critica alla quale esso è in equilibrio con la sua fase liquida, analogamente ad un vapor saturo di densità ben determinata. La sola base empirica di questa applicazione delle statistiche intermedie era all'epoca lo studio condotto intorno al 1938 delle proprietà dell'elio liquido da parte di F. London⁹, che interpretò in quei termini un effetto di condensazione (che egli battezzò "elio liquido II") in più rispetto a quello previsto dalla teoria classica

delle transizioni di fase. Si trattava appunto di un effetto dovuto alla presenza di un numero di occupazione non superabile di un certo stato energetico da parte di particelle identiche di natura bosonica, un effetto peraltro previsto teoricamente dallo stesso Einstein, anche se da lui non ben inquadrato proprio perchè non rinunciava alla validità assoluta della sua statistica¹⁰. Occorreva infatti accettare che una correlazione statistica attrattiva comunque inferiore a quella esistente tra i fotoni, valesse per tali particelle, e che essa si riducesse con l'aumento del numero delle particelle presenti in quello stato, appunto come in un vapor saturo che non può contenere più di un certo numero di particelle in un certo stato energetico, oltre il quale avviene un cambiamento di fase. Ma mentre la statistica di Bose-Einstein non ha null'altro da dire circa il numero di occupazione dello stato minimo di energia nella fase "liquida" se non che è infinito - contrariamente a ciò che lo stesso Einstein giunse a pensare, guidato dal suo senso fisico intuitivo¹¹ - la nuova statistica definisce invece in modo preciso tale numero di occupazione, tanto da consentire di prevedere coerentemente l'andamento dei calori specifici del condensato in funzione della temperatura, crescente al diminuire della temperatura fino al valore critico, e poi invece decrescente al disotto di questo, in accordo con le formule empiriche di London¹², ma senza dover poi cercare, a differenza di questo¹³, di renderle compatibili con la statistica di Bose-Einstein sostituendo sommatorie ad integrali¹³.

Originalità e fecondità scientifica dell'idealismo critico di Giovanni Gentile Jr.

Tentando di ricostruire la posizione di Gentile nel suo complesso, essa risponde ad un atteggiamento costante in questo come in altri casi - come nei suoi tentativi di individuazione dei limiti dell'elettrodinamica nello studio dei raggi cosmici¹⁵, o delle implicazioni di più vasto raggio delle equazioni di Dirac per l'elettrone e per particelle con momento intrinseco qualsiasi¹⁶, che riecheggiano i tentativi del suo grande amico E. Majorana¹⁷ ossessionato dalla ricerca di sempre nuove simmetrie. Per lui si tratta infatti sempre di operare uno sforzo esplicito di superamento di certezze dogmatiche, di assolutizzazioni della teoria tendente a cristallizzarsi nel momento stesso in cui assume forma definitiva, come appunto la teoria dei quanti che sembrava imporre due sole forme di correlazione statistica tra gli oggetti da essa studiati, quella bosonica e quella fermionica. Da questo punto di vista viene in mente un'analoga critica che pochi anni prima muoveva alla meccanica quantistica, anzi alla stessa relatività einsteiniana K. R. Popper allorchè sosteneva che bisognava osare falsificare queste teorie non accettandole come dogmi, ma solo come congetture, cercando in particolare di vedere se possa essere violato rispettivamente il limite delle velocità della luce e quello del quanto finito d'azione nei fenomeni fisici¹⁸. Si tratterebbe infatti di stimoli per la ricerca e non di tabù inviolabili. Il pensiero infatti è stimolato dai limiti, dall'opposizione dell'oggetto che esso tende a superare di continuo, si direbbe parafrasando G. Gentile senior, il padre del nostro fisico di cui egli era filosoficamente un fervente seguace, quel Gentile che a sua volta parafrasava Fichte, non solo nella filosofia speculativa ma anche nella scienza¹⁹. Resta naturalmente diversa la prospettiva di Popper che formalizza il controllo critico delle teorie in termini di criterio di falsificabilità empirica tipico della scienza a differenza della filosofia speculativa, in un quadro

che si rifà comunque, nonostante le ben note differenze, ai criteri di demarcazione tra scienza e filosofia tipici del neopositivismo²⁰. In Gentile senior e junior il processo storico-dialettico comporta invece arricchimento e mutamento incessanti, scoprimento ed ampliamento di connessioni tra le parti del pensiero pensante nel suo sforzo di assimilare l'oggetto in termini di attività, anzitutto nella speculazione filosofica e quindi anche nella scienza, in quanto quest'ultima sia effettivamente partecipe della storicità concreta della prima²¹. Neanche in questo caso comunque di rifiuto dell'oggetto si parla, ma di disvelamento progressivo della sua ricchezza spirituale, di continua scoperta della sua mobile vitalità, di riconoscimento della sua realtà attiva e speculativa e, quindi, in quanto tale, soggettiva. In ogni caso c'è una critica della fissità del pensiero pur con differenti motivazioni, empirista liberalizzata e critica nel caso di Popper ed idealista attualista in quello di Gentile. Così la stessa tesi della "theory-ladenness" di Popper, in quanto sostiene che i fatti sono sempre rivedibili alla luce di teorie diverse, tanto da costituire non solide basi ma semplici palafitte accettate per il momento alla luce di teorie temporaneamente vigenti, trova riscontro nell'affermazione di Gentile junior dell'intrinseca soggettività e spiritualità, dunque teoreticità dello stesso atto sperimentale²². Questa posizione, in contrasto con la concezione praticistica crociana della scienza come pseudoconcetti dotati di puro valore economico, sostiene infatti la presenza di tale soggettività e spiritualità nella vecchia e, ancor più esplicitamente, con Bohr, nella nuova fisica, oltre l'assoluta pretesa oggettività dei fatti²³. Critica dell'oggettività assoluta, quella di Gentile, che non ha tuttavia nulla del volontarismo soggettivistico di altri fisici del novecento filosoficamente ispirati come J. Jeans e P. Jordan, pure ripubblicati in italiano a cura dello stesso Gentile. Essa è piuttosto legata al senso della tensione ed incompletezza intrinseca di un pensiero verso una verità che esso non può esaurire mai completamente ma solo approfondire con uno sforzo infinito che rivela via via l'intima natura spirituale del reale, anche quello a prima vista morto ed inanimato, ed in realtà anch'esso attualisticamente vivo. Certo, non è questo il punto di vista di Popper, e neanche quello di Einstein secondo cui la teoria, seppure per il momento incompleta, può essere comunque portata a compimento attraverso nuove idee e controlli, fino a riuscire a raggiungere in qualche modo, perfino senza esserne consapevoli secondo Popper, la verità finale. Qui la fine dello sforzo non è neanche immaginabile, il travaglio del pensiero non ha compimento²⁴. E tuttavia non c'è alcuna presunta svalutazione idealistica della scienza, intesa anzi come compito spirituale infinito e rivelazione quindi senza fine dell'uomo a se stesso²⁵. Si potrà respingere come retorica tale visione, ma non si può non coglierne la serietà, lo spirito di dedizione al lavoro scientifico di ricerca, la caratterizzazione ad essa intrinseca dell'idealismo come rapporto attivo soggetto-oggetto, rispettoso delle determinazioni dell'oggetto, in questo caso fisico-matematiche, ma teso comunque alla loro incessante inesauribile unificazione attiva e dinamica. E' per tale motivo che, secondo una sua personale confidenza, un allievo di Gentile, Vittorio Somenzi, poi filosoficamente evoluto nel senso di un materialismo critico operazionisticamente, quindi attivisticamente orientato, poté vivere l'idealismo scientifico di Gentile junior come una sorta di criticismo di tipo kantiano, caratterizzato dal riconoscimento, pur all'interno del rapporto indissolubile soggetto-oggetto, delle ragioni della stessa oggettività, sia pure spiritualisticamente, attualisticamente vissute²⁵. Ne è traccia nello stesso lavoro

di tesi di laurea di Somenzi, discussa nel 1940 sotto la guida di Gentile, sulla superconduttività²⁷. Un altro tema di ricerca divenuto singolarmente attuale, come è ben noto, ora, a distanza di decenni dalla sua nascita così come la condensazione di Bose-Einstein, e vissuto quindi anch'esso probabilmente da Gentile, al pari di quello, come ricerca di un arricchimento di aspetti e nessi nuovi ed insospettati alla luce delle teorie accettate: in questo caso l'elettrodinamica standard. Questa teoria veniva infatti testata in modo nuovo applicandola allo studio di particolari materiali solidi metallici a temperatura critica, prescindendo ovviamente dall'interesse tecnologico-applicativo e perfino economico del tema che allora non appariva, non essendo facilmente accessibile il limite bassissimo di temperatura allora previsto e ritenuto inevitabile, a differenza di oggi, com'è noto, per la produzione del fenomeno. Anche in questo caso infatti lo stimolo alla ricerca sembra essere piuttosto uno sforzo, una tensione al superamento di determinati limiti, attraverso un approfondimento dell'oggetto da parte di un pensiero critico perennemente mobile e vivo aldilà di tutto ciò che appaia già acquisito, noto e consolidato.

¹ Cfr. P. Caldirola, "Evoluzione storica del principio di esclusione nella fisica", *Scientia*, 110 (1975), pp. 51-67, che, pur accettando il punto di vista ortodosso sulle statistiche, ed essendo quindi scettico nei confronti del punto di vista alternativo di Gentile, ha tuttavia il merito di evidenziarlo dal punto di vista storico e - più in generale -, sia pure come dubbia e problematica possibilità (assai prima del suo attuale revival), anche epistemologico.

² La teoria di Bohr-Sommerfeld poteva infatti al massimo fissare un identico volume per ogni celletta elementare dello spazio delle fasi associato ad un sistema di particelle di un gas quantistico, ma senza giungere ancora a postulare l'assoluta identità di tali particelle, tanto da poterne consentire l'occupazione senza limitazioni di numero di uno stesso stato quantico se bosoni, o da escludere invece che più d'una di esse potesse occupare un singolo stato quantico se fermioni. A tale scopo occorre ancora appunto che Bose ed Einstein, da un lato, stabilissero una nuova correlazione positiva per le particelle soggette alla loro statistica, e che Pauli, dall'altro, formulasse il principio di esclusione, e quindi invece una nuova correlazione negativa per quelle soggette invece alla statistica introdotta poi da Fermi e Dirac. Cfr. P. Caldirola cit., pp. 54-57.

³ Nella formulazione di Fermi infatti furono evidenziate subito conseguenze fisiche, solo implicite nella formulazione più astratta e formale di Dirac, del principio di esclusione anche per campi di forze qualsiasi, oltre quelli che mantengono nella sua orbita atomica il singolo elettrone. Come appunto quelli che mantengono stabile l'intera struttura di un atomo come quello di elio o di una molecola come quella di idrogeno, le forze di scambio cioè che fanno saltare gli elettroni da un'orbita all'altra e da un atomo all'altro garantendone così la stabilità, proprio allo scopo di evitare che due di essi possano occupare simultaneamente uno stesso stato. Cfr. *ibidem*, pp.57-61.

⁴ Sembra qui ndi che la distinzione esclusiva tra le due statistiche quantistiche prescinda, nel quadro della meccanica quantistica standard, dalle diverse formulazioni e connesse interpretazioni fisiche, in termini di proprietà di corpuscoli come nella prima quantizzazione di Heisenberg, Pauli e Born, o in termini di campi d'onda quantizzati come nella seconda quantizzazione appunto

degli stessi Heisenberg e Born con Jordan e Dirac, in cui si perde la stessa precisa conservazione del numero delle particelle soggette agli operatori di creazione e di distruzione. Cfr. *ibidem*, p. 61.

⁵ Cfr. G. Gentile j., "Osservazioni sopra le statistiche intermedie", *Rendiconti Istituto Lombardo*, 74(1940-1), pp.133-7, oltre che *Nuovo Cimento*, 17(1940, p.493.

⁶ Caldirola ricorda in op. cit., a p. 62, che è stata fornita una dimostrazione rigorosa da A. Borsellino in *Nuovo Cimento*, 4 (1947), p.52, della violazione delle proprietà di simmetria delle equazioni d'onda previste dalla meccanica quantistica standard da parte delle statistiche intermedie in generale, e quindi della necessità di riformulare sostanzialmente la teoria per renderla compatibile con queste ultime.

⁷ Il contributo di Green, apparso su *Physical Review*, 90(1952), p. 270, fu quindi solo il primo di alcuni tentativi di riformulare la teoria quantistica dei campi per renderla compatibile con le parastatistiche, essenzialmente attraverso modifiche per generalizzazione delle relazioni di commutazione di quella teoria (cfr., tra gli altri, i lavori di O. W. Greenberg et al. a partire dal 1964). Il loro limite consiste appunto nel loro carattere essenzialmente formale, che non approfondisce l'analisi delle evidenze sperimentali a favore dell'esistenza di particelle quantistiche che obbediscano a quelle statistiche. Queste evidenze sono quindi rimaste fin quasi agli anni '90 ambigue anche perché in realtà trascurate. A tale proposito Caldirola nel suo articolo, che pure ha il merito di riconoscere l'importanza teorica del lavoro di Gentile, dopo aver detto che non esiste alcuna evidenza a favore della sua conferma sperimentale, si limita solo ad accennare vagamente alla possibilità, come è noto di assai difficile conferma, che i *quarks* (ipotetici costituenti degli adroni) possano obbedire alle statistiche intermedie (cfr. P. Caldirola, op. cit., p. 61 cit.), nonostante vi fossero già all'epoca di Gentile, come vedremo subito, ben altre più concrete evidenze, peraltro allora note allo stesso Caldirola (cfr. id., "Osservazioni sulle statistiche intermedie", *Ricerca Scientifica*, 12 (1940), pp.1020-7. Comunque, a partire dagli anni '90 la discussione anche sul piano teorico si è fatta fisicamente più precisa. Cfr., tra gli altri, O.W.Greenberg, "Interactions of particles having small violations of statistics", *Physica A*, 1992, pp. 419-427, e M. V. Medvedev, "Properties of Particles Obeying Ambiguous Statistics", *Physical Review Letters*, 78(1997), pp. 4147-50.

⁸ Cfr. G. Gentile j., "Sopra il fenomeno della condensazione del gas di Bose-Einstein", *Ricerca Scientifica*, 12 (1941), pp. 341-6 e lettera a P. Caldirola riportata in id., "Osservazioni sulle statistiche intermedie" cit., pp. 26-s.

⁹ A partire dal 1995. Cfr. ad esempio K. B. Davis et al., "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Physical Review Letters*, 75 (1995), p. 3969-73, e A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari (eds.), *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press, 1995.

⁹ Cfr. F. London, *Nature*, 643(1938), p. 141.

¹⁰ Cfr. A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", *Sit. ber. Preuss. Akad. Wiss.*, 2. Abhandlung, p. 3.

¹¹ Cfr. G. Gentile j., "Sopra il fenomeno..." cit., pp. 341-s.

¹² *Ibidem*, pp. 345-s.

¹³ Cfr. F. London, *Physical Review*, 54 (1938), p. 947.

¹⁴ Cfr. G. Gentile j., "Sopra il fenomeno..." cit., p. 342. Come riconobbe peraltro lo stesso P. Caldirola che, nell' articolo del 1941 su *Ricerca Scientifica* cit., ancora attribuisce una qualche rilevanza empirica concreta "praticamente interessante" alle statistiche intermedie (cfr. *ibidem*, p. 26).

¹⁵ Cfr. G. Gentile j., "Sui limiti dell' elettrodinamica ed i nuovi risultati sperimentali sulla radiazione cosmica", *Nuovo Cimento*, ser. 8, 16 (1939), pp. 113-35.

¹⁶ Cfr. G. Gentile j., "Sulla rappresentazione del gruppo di Lorentz e sulla teoria di Dirac dell' elettrone", *Nuovo Cimento*, ser. 8, 16 (1939), pp. 181-90, e "Sulle equazioni d' onda relativistiche di Dirac per particelle con momento intrinseco qualsiasi", *Nuovo Cimento*, ser. 8, 17 (1940), pp. 5-12.

¹⁷ Al rapporto di grandissima amicizia, che comportò anche una certa consonanza intellettuale tra Gentile junior e d E. Majorana, fa riferimento R. Maiocchi in *Non solo Fermi. I fondamenti della meccanica quantistica nella cultura italiana tra le due guerre*, Firenze, Le Lettere, 1991, p. 70. Tra l' altro il saggio di Majorana su "Il valore della statistica nella fisica e nelle scienze sociali" fu addirittura pubblicato, dopo la sua scomparsa, nella raccolta postuma di *Scritti minori di scienza, filosofia e letteratura* di G. Gentile j. (Firenze, Sansoni, 1943, pp. 205-26).

¹⁸ Cfr. K. R. Popper, *Logica della scoperta scientifica*, Torino, Einaudi, 1970, pp. 272-ss (I edizione, Wien, Springer, 1934-5).

¹⁹ Del resto ad un certo punto lo stesso Gentile senior applicò esplicitamente alla scienza tale punto di vista, per influenza, si può pensare, oltre che dell' allievo Ugo Spirito, che sosteneva allora addirittura l' identità di scienza e filosofia, del figlio Giovannino. Cfr. G. Gentile s., "Filosofia e scienza", *Giornale Critico della Filosofia Italiana*, Serie I, 12 (1931), pp. 81-92, che Maiocchi in particolare, in op. cit., Cap. VI, "Idealismo e quanti", p. 151, ritiene riecheggi addirittura un passo della stessa tesi di laurea del figlio, *Massa ed elettrone* (dattiloscritta, 1927), pp.106-s.

²⁰ Come peraltro gli stessi neopositivisti - per i quali Popper, che da giovane aveva anche frequentato le mitiche riunioni del Circolo di Vienna, rappresentava una specie di "opposizione interna"- avevano sottolineato, ad esempio R. Carnap nella sua replica al contributo di Popper "The Demarcation between Science and Metaphysics" al volume collettivo *The Philosophy of Rudolf Carnap*, a cura di P. A. Schilpp (La Salle, Illinois, Open Court, 1964).

²¹ La stessa concezione storicista della verità, non solo filosofica ma anche scientifica purché resa consapevole di sé, è presente appunto chiaramente nei due ultimi scritti citati del padre e del figlio, in particolare in G. Gentile s., op. cit., pp. 87-s.

²² Cfr. G. Gentile j., "Metodo sperimentale", composto per l' *Enciclopedia Italiana* e ripubblicato in *Questioni classiche di fisica*, Firenze, Sansoni, 1937, p. 15.

²³ Cfr. G. Gentile j., "Posizioni nuove e nuovi problemi nello studio della natura", in *Scritti minori di scienza, filosofia e letteratura* cit., p. 31.

²⁴ Cfr., oltre alla tesi di laurea cit., loc. cit., *Fisica nucleare*, Roma, Edizioni Roma, 1937, p. 19.

²⁵ Cfr. G. Gentile j., "Posizioni nuove ..." cit., passim .

²⁵ Esplito riferimento a Kant è del resto presente in G. Gentile j., “Motivi speculativi kantiani nella fisica moderna”, *Atti XXIV riunione SIPS*, Roma, V volume, 1936, pp. 397-400.

²⁷ Cfr. V. Somenzi, “Interazione elettrodinamica di due elettroni e teoria di Welker della superconduttività”, in Id., *Tra fisica e filosofia*, Abano Terme, Piovan, 1989, pp. 33-48.