Matematica, Formazione scientifica e nuove tecnologie
Atti del IV Convegno Nazionale
9-10 dicembre – Macchia di Ferrandina (Mt)

a cura di M. Fasano e R. Grande

Similitudine, omogeneità e dimensioni fisiche: il teorema di Buckingham

Luisa Bonolis

SOMMARIO
In quanto eredità dell'esperienza scolastica, la geometria è vista come un ramo astratto della matematica, ma in realtà si tratta di una scienza con evidenti radici nell'esperienza umana, che si presenta come primo esempio di "laboratorio linguistico" per l'elaborazione di linguaggi scientifici ed è comunque un buon campo per esercitarsi a riconoscere il processo di generalizzazione dei concetti e del loro uso e per introdurre convenzioni sulle unità di misura e per utilizzare i concetti di similitudine e scala. Il concetto di similitudine è stato generalizzato dalla fisica allo scopo di sviluppare una "matematica delle dimensioni" strettamente simbolica e basata sul principio di omogeneità, un vero e proprio "principio semantico" che presiede alla correttezza del linguaggio con cui la fisica si esprime.

1.1 - IL PRINCIPIO DI OMOGENEITÀ

Due figure geometriche sono simili se è possibile stabilire fra i punti dell'una e quelli dell'altra, una corrispondenza biunivoca tale che sia costante il rapporto tra un qualsiasi segmento di una delle due figure con il corrispondente segmento dell'altra. Una volta noto questo rapporto, le dimensioni della figura simile possono essere ottenute moltiplicando le dimensioni della prima per questo fattore di scala, ma gli angoli al vertice restano identici, nella copia come nell'originale.
La similitudine fisica può essere considerata una generalizzazione della similitudine geometrica. Anche in questo caso il passaggio ad un fenomeno simile avviene attraverso un opportuno fattore di scala e può essere considerato qualcosa di analogo alla trasformazione da un sistema di unità di misura ad un altro. Per misurare le grandezze è necessario stabilire un sistema di unità, che risulta individuato quando siano assegnate le grandezze fondamentali e fra queste, quelle particolari grandezze che si intende assumere come unitarie.
Il rapporto tra i valori numerici della stessa area misurata in due diverse scale di lunghezza dipende dal rapporto tra le due scale di lunghezza. D'altra parte, il rapporto tra due diverse aree misurate in metri quadrati deve essere lo stesso rispetto al rapporto tra le stesse aree misurate in centimetri quadrati. Il rapporto tra i valori numerici di due quantità fisiche derivate da quelle fondamentali (massa, lunghezza e tempo per le grandezze meccaniche nel Sistema Internazionale) deve essere indipendente dalla scelta della scala fatta per le unità fondamentali, per definizione stessa di sistema di unità di misura.
Se si tiene conto di questa proprietà fisica, è possibile dimostrare che, secondo una notazione introdotta da Maxwell, tutte le grandezze fisiche possono essere espresse dimensionalmente per mezzo delle unità fondamentali, attraverso un monomio del tipo:

$$[Q] = L^{\lambda} M^{\mu} T^{\tau}$$

Questa equazione dimensionale dice che Q è omogenea di grado λ rispetto alle lunghezze, di grado μ rispetto alle masse e di grado τ rispetto ai tempi. Se si passa a nuove unità L', M', T' che abbiano la seguente relazione con le unità primitive L, M, T

$$L' = \frac{L}{a} \qquad M' = \frac{M}{b} \qquad T' = \frac{T}{c}$$

e se q è la misura di Q nel sistema primitivo in modo che

$$Q = q L^{\lambda} M^{\mu} T^{\tau}$$

Esprimendo il secondo membro in termini di L', M', T' si ha

$$Q = q a^{\lambda} b^{\mu} c^{\tau} L'^{\lambda} M'^{\mu} T'^{\tau}$$

da cui si ricava che la misura q' di Q nel nuovo sistema è

$$q' = q a^{\lambda} b^{\mu} c^{\tau}$$

Il coefficiente $\chi = a^{\lambda} b^{\mu} c^{\tau}$ per cui bisogna moltiplicare la misura q rispetto al primo sistema consente di passare alla misura q' rispetto al secondo sistema.

Per esempio, l'equazione delle dimensioni di una forza è $[F] = LT^{-2}M$, quindi il coefficiente relativo è $\chi = abc^{-2}$

Siano χ_1, χ_2, χ_3 i coefficienti relativi a tre grandezze Q_1, Q_2, Q_3

$$\chi_1 = a^{\lambda_1} b^{\mu_1} c^{\tau_1}$$
$$\chi_2 = a^{\lambda_2} b^{\mu_2} c^{\tau_2}$$
$$\chi_3 = a^{\lambda_3} b^{\mu_3} c^{\tau_3}$$

Se tali coefficienti sono algebricamente indipendenti, le Q_i si dicono dimensionalmente indipendenti e affinchè ciò si verifichi è necessario e sufficiente che il determinante delle dimensioni sia

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \tau_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Le leggi fisiche sono delle relazioni funzionali costruite attraverso quantità variabili che caratterizzano un certo tipo di fenomeno. I valori numerici di queste quantità, dotate di dimensioni fisiche, dipendono dalla scelta del sistema di unità di misura, che peraltro non è, e non può essere, in alcun modo collegato con la sostanza del fenomeno. Di conseguenza le relazioni funzionali che esprimono i fatti fisici devono possedere una determinata struttura, che tenga appunto conto dell'indipendenza di questi dal sistema di unità di misura.

Se la quantità $Q = f\{Q_1, Q_2, ..., Q_k, Q_{k+1}, ..., Q_n\}$, definita come una funzione delle quantità indipendenti Q_1, Q_2,......, Q_n, dotate di dimensioni, rappresenta una certa legge fisica, deve essere indipendente dalla scelta del sistema di unità di misura.

Si supponga che le prime k ($k \leq n$) quantità dimensionali Q_1, Q_2,..., Q_n siano dotate di dimensioni fisiche indipendenti, nel senso che le dimensioni di una quantità, non possono essere espresse sotto forma di un monomio di potenze attraverso le dimensioni delle altre quantità.

Per esempio, lunghezza (L), velocità (L/T), e energia (ML^2/T^2) sono tra loro indipendenti, mentre lunghezza (L), velocità (L/T) e accelerazione (L/T^2) sono dipendenti.

Se k è il numero più alto di parametri con dimensioni indipendenti, le dimensioni delle quantità Q_{k+1},..., Q_n, possono quindi essere espresse attraverso le dimensioni fondamentali dei parametri Q_1, Q_2,..., Q_k.

A questo punto, se si trasformano le unità di misura delle quantità indipendenti Q_1, Q_2,...,Q_k attraverso i fattori β_1, β_2,..., β_k in modo tale che

$$Q_1, ..., Q_k \quad \rightarrow \quad \beta_1 Q_1, ..., \beta_k Q_k$$

si trasforma anche ciascuna delle Q_{k+1},..., Q_n, rimanendo tuttavia sempre espressa sotto forma di monomi attraverso le dimensioni fondamentali delle Q_1,...,Q_k. Di conseguenza la funzione

$$Q = f\left\{Q_1, Q_2, \ldots Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_n\right\}$$

si trasforma nel nuovo sistema di unità di misura in

$$Q' = f\left\{\beta_1 Q_1, \ldots, \beta_k Q_k, \left[\beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2}, \ldots, \beta_k^{s_k}\right] Q_{k+1}, \ldots, \left[\beta_1^{q_1}\beta_2^{q_2}, \ldots, \beta_k^{q_k}\right] Q_n\right\}$$

Quest'ultima può essere riportata alla forma

$$Q' = \left[\beta_1^{m_1}, \beta_2^{m_2}, \ldots, \beta_k^{m_k}\right] f\left\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_n\right\}$$

Questa relazione mostra che la funzione $f\left\{Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_n\right\}$ è omogenea nelle scale β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_k$ che peraltro sono arbitrarie.

2 - Similitudine dinamica e terza legge di Keplero

Se $\mathbf{r}(t)$ è una soluzione delle equazioni che regolano il moto di un determinato sistema fisico, ci chiediamo se esista una soluzione della stessa forma una volta che nell'equazione di partenza siano stati introdotti dei cambiamenti di scala in un certo numero di variabili. Se questo avviene, il moto "simile" sarà proporzionale ad $\mathbf{r}(t)$ attraverso un certo fattore di scala.
L'equazione del moto per un corpo in un campo di forza gravitazionale è

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$$

Se si moltiplicano tutte le coordinate per una stessa costante ß e il tempo per un'altra costante arbitraria τ

$$\mathbf{r} \rightarrow \beta\mathbf{r} = \mathbf{r}' \qquad\qquad t \rightarrow \tau t = t'$$

si vede subito che la forza gravitazionale è una funzione omogenea delle coordinate che soddisfa la condizione

$$\mathbf{F}(\beta\mathbf{r}) = \beta^{-2}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})$$

Se si esegue la trasformazione completa delle equazioni del moto si trova

$$\frac{\beta}{\tau^2} m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\beta^{-2}\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$$

La forma dell'equazione del moto rimane invariata se

$$\beta = \tau^{2/3}$$

Se la forza, in generale, è una funzione omogenea di grado n delle coordinate, le equazioni del moto ammettono traiettorie geometricamente simili, nel senso che tutti i tempi del moto considerati in punti corrispondenti delle traiettorie stanno tra loro nel seguente rapporto

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{\frac{1-n}{2}}$$

dove $\frac{\lambda'}{\lambda}$ è il rapporto fra due qualsiasi dimensioni lineari considerate sulle due traiettorie.

Questa relazione vale in particolare se si considerano tempi caratteristici e lunghezze caratteristiche del fenomeno. Nel caso della forza gravitazionale, per la quale $n = -2$, se si utilizzano T ed a, rispettivamente il periodo del moto e il semiasse maggiore dell'ellisse, questa diventa proprio la terza legge di Keplero, che risulta quindi legata alle proprietà di omogeneità della legge di forza:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{costante}$$

I valori delle grandezze meccaniche caratteristiche del moto considerate in punti corrispondenti delle orbite e in istanti corrispondenti risultano anch'esse legate al rapporto $\frac{\lambda'}{\lambda}$. Nel caso della velocità, dell'energia e del momento angolare

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{\frac{1+n}{2}} \qquad \frac{E'}{E} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{1+n} \qquad \frac{L'}{L} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{\frac{3+n}{2}}$$

Per similitudine l'energia scala infatti come una velocità al quadrato e quindi nel caso gravitazionale come $\frac{\beta^2}{\tau^2}$. Ma allora

$$E\,\lambda = E'\,\lambda' = \text{costante}$$

e di conseguenza si trova che l'energia è legata al semiasse maggiore

$$E \approx \frac{1}{a}$$

Per la terza legge di Keplero sono cioè possibili *orbite simili* per le quali

$$E \approx \frac{1}{\beta}$$

Se è noto il valore della costante gravitazionale G, attraverso la terza legge di Keplero si può "pesare" un sistema binario costituito da due stelle che ruotano intorno al loro comune centro di massa. Se si conosce la distanza del sistema binario dal sistema solare, con delle misure angolari si riescono a calcolare il periodo e il semiasse, così che usando

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

si ricava la massa totale M del sistema delle due stelle.

3 - Il teorema di Buckingham

Un particolare aspetto della similitudine è quello che riguarda i modelli matematici. Un modello è una rappresentazione di un sistema fisico in cui l'operazione più importante è quella di identificare le variabili rilevanti per il problema, $a_1 .... a_n$ attraverso le quali si possa costruire una funzione $a = f(a_1...a_n)$. L'analisi dimensionale deve garantire che entrambi i membri dell'equazione abbiano le stesse dimensioni fisiche. Se tutte le grandezze utili per questa descrizione sono esprimibili attraverso unità di misura derivate da tre grandezze fondamentali, è sempre possibile cambiare sistema di unità di misura e quindi il valore numerico della funzione a, calcolato in corrispondenza dell'insieme $a_1....a_n$ si trasformerà in a' in corrispondenza di $a'_1....a'_n$ Il principio di omogeneità impone che il rapporto

$$\frac{a}{a'} = \frac{f(a'_1...a'_n)}{f(a_1...a_n)}$$

non debba dipendere dalla scelta delle unità di misura. In altri termini la scelta delle unità di misura è frutto unicamente di convenzioni, rispetto alle quali questi rapporti sono invarianti. Come sempre, all'arbitrarietà di una scelta, si associa una proprietà di invarianza.
Un'espressione che rimane formalmente esatta anche quando le dimensioni delle unità fondamentali vengono variate si dice equazione completa. Per un corpo in caduta libera $s = 4.9\ t^2$ soltanto se s viene misurato in metri e il tempo t in secondi. Se s è misurato in piedi e il tempo in minuti, l'equazione è sbagliata, ed è quindi un'equazione incompleta, mentre $s = \frac{1}{2}gt^2$ è un'equazione completa perchè è valida in qualsiasi insieme consistente di unità.
Nella seguente equazione

$$\frac{PV}{T} = \text{costante}$$

nella quale P è la pressione, V il volume specifico e T la temperatura assoluta di una massa di gas, la costante non è adimensionale, ma dipende, per un dato gas, dalle unità adottate per la misura di P, V, e T; l'equazione non è completa. Ulteriori indagini mostrano che l'equazione può essere scritta

$$\frac{PV}{RT} = N$$

nella quale il simbolo R sta per una quantità caratteristica di ciascun gas ma che rimane fissata per il gas specifico, quando le unità di P, V e T vengono fissate. Se esprimiamo il valore di R in termini di unità derivate, N è una costante adimensionale e non dipende dalle dimensioni delle unità di P, V e T, ma solo dalla relazione che le lega ad R. Ora l'equazione è un'equazione completa.
Come abbiamo visto, le dimensioni di una grandezza possono sempre esprimersi attraverso un prodotto di potenze di lunghezze, (L) , tempi (T) e masse (M)

$$Q = L^{\lambda}\ M^{\mu}\ T^{\tau}$$

dove λ, μ, τ sono numeri caratteristici delle dimensioni di Q, derivati a partire dalle dimensioni delle grandezze fondamentali L, T, M.
Più in generale consideriamo un gruppo di n grandezze fisiche Q_1, Q_2....,Q_n alcune delle quali possono essere dimensionali, per le quali esista una ed una sola equazione completa che le collega, $\Phi(Q_1....Q_n) = 0$ ed assumiamo, in generale, che le dimensioni delle n quantità siano espresse in termini di m quantità fondamentali Q_1, Q_2,...,Q_m. Edgar Buckingham (1867−1940) ha provato (1914) che questa singola relazione Φ può essere sempre espressa in termini di qualche funzione arbitraria F del numero massimo di *prodotti adimensionali indipendenti*, π_1, π_2,...,π_{n-m}, che si possono costruire attraverso le n variabili. L'uso del concetto di dimensione fisica, attraverso il principio di omogeneità, è riassunto quindi nel teorema di Buckingham: la forma più generale di relazione tra n grandezze fisiche Q_1, Q_2,... Q_n è del tipo

$$F(\pi_1, \pi_2,..., \pi_{n-m}) = 0$$

dove m è appunto il numero delle dimensioni fondamentali impiegate per descrivere le Q.
Partendo da questa equazione, anche se non si conosce esplicitamente F, si possono derivare utili informazione sul sistema in esame.

Supponiamo di voler trovare il periodo τ di un pendolo semplice senza sapere che $\tau \propto \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, dove λ è la lunghezza del pendolo. Scegliamo massa, lunghezza e tempo come unità fondamentali, quindi $m = 3$. Poi elenchiamo tutti i parametri che riteniamo rilevanti per il moto del pendolo

Quantità	*Simbolo*	*Dimensioni*
Lunghezza del filo	λ	[L]
Massa sospesa	m	[M]
Accelerazione di gravità	g	$[LT^{-2}]$
Ampiezza angolare	θ	[0]
Periodo di oscillazione	τ	[T]

Da questa tabella n = 5 mentre $n-m$ = 2 quindi ci aspettiamo di trovare due prodotti indipendenti adimensionali. Uno è θ, l'ampiezza angolare, l'altro è $\frac{\lambda}{g\tau^2}$. Dato che la massa m figura unicamente nella seconda riga della tabella, non può apparire in alcun prodotto adimensionale. Quindi il periodo di oscillazione τ non dipende dalla massa del pendolo e il teorema fornisce $F\left(\theta;\frac{\lambda}{g\tau^2}\right) = 0$ ovvero

$$\tau = \Theta(\theta)\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

dove Θ(θ) è una arbitraria funzione di θ.
Se si fa l'assunzione addizionale che θ sia abbastanza piccolo da essere trascurabile, allora n = 4, $n-m$ = 1 e $F\left(\frac{l}{gt^2}\right) = 0$. Perchè questo sia vero per tutti i valori delle variabili deve essere

$$\tau \propto \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

Il teorema permette quindi di prevedere che il periodo del pendolo è proporzionale alla radice quadrata di questo rapporto. La costante di proporzionalità (2π) non può essere ottenuta attraverso un'analisi dimensionale. D'altra parte questa relazione costituisce già una legge fisica che si può utilizzare, anche se limitatamente ad un confronto per similitudine: due pendoli di lunghezze λ_1e λ_2 avranno periodi τ_1e τ_2 che sono nel seguente rapporto

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

Nel problema della caduta dei gravi le quantità che contano sono h, l'altezza di caduta e g, accelerazione di gravità. Con queste grandezze si può costruire un rapporto adimensionale che rappresenta la dipendenza da h e da g del tempo di caduta

$$\frac{h}{gt^2} = \text{costante}$$

È l'unica combinazione possibile che sia indipendente dal sistema di unità scelto e che fornisca la dipendenza funzionale tra queste quantità.
L'analisi dimensionale ci consente di prevedere la forma di una relazione, lasciando eventualmente all'esperimento la determinazione del fattore numerico. In ogni caso attraverso il concetto di similitudine si può usare come tempo campione t_0 che corrisponde a una certa quota di caduta h_0 e pur non conoscendo il valore della costante è sempre possibile affermare che

$$\frac{t_1}{t_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

Anche il rapporto $\frac{gh}{t^2}$ è adimensionale e quindi la velocità sarà legata all'altezza e alla accelerazione di gravità da una relazione del tipo: $v \propto \sqrt{gh}$. Non conosciamo il coefficiente di proporzionalità, ma le dipendenze funzionali sono completamente determinate dal carattere dimensionale delle grandezze.

Un modello in piccola scala di una macchina, costruito in ogni sua parte con lo stesso materiale della corrispondente parte della macchina, sarà quindi un sistema materialmente simile. Per analizzare il funzionamento della macchina basta ricorrere al rispettivo rapporto di similitudine, ricavando da ogni grandezza meccanica misurata direttamente sul modello, il valore della stessa grandezza per la macchina. La realizzazione della similitudine meccanica presenta tuttavia delle difficoltà dovute soprattutto, come già aveva intuito Galilei, al diverso comportamente delle resistenze passive nel modello e nella macchina, che vanno quindi analizzate caso per caso.

Supponiamo di voler costruire un gigantesco pendolo, molto costoso, quale potrebbe essere una struttura da esposizione universale. Il periodo del pendolo gigante può essere determinato a partire da un modello che abbia, per esempio, della sua lunghezza. Prescindendo dagli attriti, le sole forze applicate sono i pesi e dato che i periodi di oscillazione di due pendoli simili stanno fra loro come le radici quadrate delle rispettive lunghezze, il teorema predice che il periodo del modello sarà di quello del pendolo gigante.

Un problema di natura astrofisica è quello di catalogare le stelle pulsanti supponendo che il meccanismo di oscillazione sia di origine gravitazionale. Si può cercare di costruire la dipendenza della frequenza di pulsazione a partire dai parametri che caratterizzano la stella, massa, densità e raggio, considerando che la densità ρ si può esprimere attraverso la massa e il raggio. La forza gravitazionale è caratterizzata da G e quindi le dimensioni di queste grandezze sono

$$[\nu] = T^{-1}$$
$$[R] = L$$
$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Il problema è: quanti prodotti adimensionali si possono costruire, se il meccanismo è di tipo gravitazionale? A partire da queste grandezze si può scrivere

$$\rho G = T^{-2}$$

che ha le dimensioni di una frequenza al quadrato, di conseguenza il rapporto

$$\frac{\nu^2}{\rho G} = \text{costante}$$

Questa quantità è uguale per tutte le stelle, perchè G è una costante universale. In conclusione

$\nu \propto$

La frequenza di pulsazione della stella risulta quindi proporzionale alla radice della densità.

4 - BIBLIOGRAFIA DI BASE

L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Infosearch Ltd. London 1959, Academic Press Inc. N.Y.), Cap. I.

L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Meccanica* (Ed. Riuniti, Roma 1982) Cap. II.

V. I Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica* (Ed. Riuniti, Roma 1986), Cap. II.

E. Buckingham, "On Physically Similar Systems. Illustrations of the Use of Dimensional Equations", *Physical Review*, Vol. IV, serie II, pag. 345, (1914).

J. N. Shive e R. L. Weber, *Similarities in Physics*, A. Hilger Ltd, Bristol 1982.