Luisa Bonolis
luisa.bonolis@roma1.infn.it

L'avvento della teoria dei gruppi nella fisica del novecento

Se l'uomo si fosse limitato ad accumulare fatti,
la scienza non sarebbe stata altro che una sterile nomenclatura
e le grandi leggi della natura sarebbero rimaste sconosciute per sempre
Pierre Simon de Laplace

La matematica non è qualcosa che si capisce, è qualcosa a cui si fa l'abitudine
John von Neumann

Una gran parte del mio lavoro consiste semplicemente nel giocare
con le equazioni e vedere cosa viene fuori
Paul Adrien Maurice Dirac

Fisica e matematica nel XIX secolo

Nel XIX secolo la matematica e la fisica emergono come discipline separate. La crescente esigenza di rigore, la rinascita del metodo assiomatico, la tendenza verso l'astrazione, sono alcune delle spinte che fanno sorgere l'idea che la vera matematica sia soltanto la "matematica pura" e che tutto il resto, in particolare la matematica applicata, debba avere una posizione subordinata. I fisici, dal canto loro, non sono molto interessati alla matematica: essere un fisico significa soprattutto fare esperimenti. Le cose cominciarono a cambiare con Maxwell, il quale pensava che nell'insegnamento della "filosofia naturale" – che all'epoca significava matematica pura da una parte e pratica sperimentale dall'altra – ciascun campo della fisica non dovesse essere considerato come "una pura collezione di fatti da coordinare per mezzo di formule incise su 'tavole di pietra' dai matematici puri", ma bensì come una nuova *mathesis* per mezzo della quale le nuove idee possono essere sviluppate". Nonostante Maxwell, nella seconda metà del XIX secolo, i fisici sono caratterizzati da una mentalità fortemente empirica, con scarsi interessi per le indagini formali, che sono invece al centro degli interessi della "fisica matematica", a sua volta scarsamente interessata alla fisica, che pure costituisce la radice della sua ispirazione. I fisici teorici cominciano a prendere le distanze dai fisici sperimentali, ma il loro ruolo in quanto fisici teorici è ancora ben lontano dall'essere strutturato all'interno della disciplina. Più tardi Max Planck ricordò come, nel succedere a Gustav Kirchhoff come professore a Berlino nel 1889, in Germania esistevano pochissime cattedre di fisica teorica ed egli stesso, che era "il solo fisico teorico che si trovasse in lungo e largo", si sentiva considerato "in certa maniera un fisico *sui generis*" o addirittura "un essere superfluo" dai suoi colleghi "sperimentatori puri", cosa che non rese facile il suo esordio.

La costruzione della meccanica nella sua forma "analitica" vede una straordinaria simbiosi tra fisici e matematici nel corso dell'Ottocento e costituisce il sistema di riferimento delle idee del XIX secolo. Il trionfo delle equazioni della fisica matematica e delle relative tecniche computazionali è uno dei motivi per cui si pensa che la fisica teorica sia una scienza completa, capace di calcolare qualsiasi cosa, dagli eventi astronomici ai campi invisibili di Maxwell.

La matematica viene considerata sempre più un aspetto naturale della fisica, ma il calcolo non si dimostra più adeguato nell'ambito di campi come l'elettrodinamica e la termodinamica. I fisici sviluppano forme di matematica come l'algebra vettoriale e la statistica per usi interni alla disciplina. Verso la fine del XIX secolo la fisica teorica conquista uno spazio sempre più definito e scopre sempre più la matematica come campo di ricerca di strumenti specifici per la fisica. Con la nascita della fisica teorica e il superamento dell'empirismo spinto da un lato e del perfezionismo fisico matematico dall'altro, la fisica entra in una nuova fase assolutamente rivoluzionaria. La matematica, partendo da più concreti aspetti metrici riguardanti lo spazio, cioè dalla geometria, aveva nel frattempo inventato un gran numero di strumenti formali che a prima vista apparivano ben lontani da una descrizione pratica della realtà: la geometria stava svelando la sua faccia più astratta. Proprietà che rappresentano una generalizzazione di concetti diffusi in geometria come quello di trasformazione, insieme al potere della rappresentazione vettoriale e in particolare dell'analisi tensoriale, trascinano definitivamente il linguaggio matematico della fisica lontano dallo "spazio cartesiano", in un processo attraverso il quale si stabilisce anche un rapporto nuovo tra i fisici e i matematici. Nonostante una forte tendenza verso la conquista di una identità, anche professionale, i matematici e i fisici continuano a interagire fortemente e condividono una notevole area di comune interesse culturale e intellettuale al volgere del secolo, contribuendo alla rivoluzione concettuale introdotta dall'opera di Einstein.

Nel Novecento i fisici creano una rappresentazione formale della realtà completamente autonoma rispetto a ciò che si può descrivere con il linguaggio comune e che, tuttavia, è "verificabile" a tutti i livelli di scala accessibili con gli strumenti di cui la fisica è in grado di dotarsi. Come ha scritto Heisenberg nel suo saggio *Natura e Fisica moderna*: "L'idea della obiettiva realtà delle particelle elementari si è quindi sorprendentemente dissolta, e non nella nebbia di una qualche nuova, poco chiara o ancora incompresa idea di realtà, ma nella trasparente chiarezza di una matematica che non rappresenta più il comportamento della particella, ma il nostro sapere sopra questo comportamento".

Nella prefazione alla prima edizione del volume *I principi della meccanica quantistica* pubblicato nel 1930, Dirac esponeva la sua visione circa quali dovessero essere i nuovi metodi della fisica teorica riguardo le leggi fondamentali della natura, secondo il suo approccio tipicamente astratto: "La formulazione di queste leggi richiede l'uso della matematica delle trasformazioni. Le cose importanti nel mondo appaiono essere gli invarianti di queste trasformazioni (o più in generale le quantità quasi invarianti, dotate di semplici proprietà di trasformazione)... L'uso crescente della teoria della trasformazione, così come è stata prima applicata alla relatività e poi alla teoria quantistica, è l'essenza del nuovo metodo della fisica teorica. Ogni progresso ulteriore va nella direzione di rendere le nostre equazioni invarianti per un numero sempre crescente di trasformazioni".

Con la nuova meccanica quantistica i fisici si erano ormai abituati al crescente livello di astrazione richiesto dalla formulazione delle teorie, anche se non erano ancora completamente coscienti delle profonde connessioni matematiche che venivano gradualmente alla luce anche grazie all'opera di grandi matematici come John von Neumann e Hermann Weyl, fortemente interessati alla fisica. Questo processo di astrazione si sarebbe fatto strada attraverso un cammino difficile, fino a prendere definitivamente il potere nella seconda metà del Novecento.

Evariste Galois e la nascita del concetto di gruppo

L'aritmetica e l'algebra elementare mostrano che spesso, effettuando una determinata operazione su insiemi costituiti da numeri di un certo tipo, il risultato è ancora un numero che appartiene alla stessa categoria. L'esempio più semplice è fornito dall'insieme dei *numeri razionali* (numeri *a/b* tali che *a* e *b* siano interi e *b* diverso da zero), quando si considera l'operazione di moltiplicazione: il prodotto di due frazioni, 3/5×4/7 è ancora una frazione, 12/35. Inoltre, per una qualsiasi frazione, 22/7 per esempio, ne esiste sempre un'altra, la cosiddetta *inversa* (in questo caso 7/22), tale che il prodotto delle due sia sempre uguale a 1 (in questo caso 22/7 × 7/22=1). Queste due proprietà, che valgono per l'intero insieme dei numeri razionali, sono comuni a moltissimi altri sistemi di numeri, finiti o infiniti, muniti di operazioni diverse dalla moltiplicazione. Ai fini di questo comportamento ciò che interessa non è "il calcolo" con relativo risultato finale. L'identità dei singoli numeri passa in seconda linea, ciò che conta è la loro appartenenza all'insieme, il loro comportamento in seguito all'operazione che li mette in relazione l'uno con altro e il fatto che il risultato sia ancora un numero che appartiene al gruppo di partenza.

Secondo quanto espresso dal grande matematico Élie Cartan, che è stato uno dei principali protagonisti nel campo della teoria dei gruppi, "Un gruppo può essere considerato l'insieme di tutte le operazioni di natura data che conservano certe proprietà degli oggetti ai quali esse sono applicate, o certe relazioni fra questi oggetti". In effetti, una legge di invarianza rispetto a un gruppo è prima di tutto una legge di conservazione: conservazione di una forma, di una relazione, di una legge o di una grandezza fisica. Il termine *simmetria*, che il linguaggio corrente restringe generalmente a quella per riflessione (ovvero la simmetria in rapporto a un piano), ingloba tutte le trasformazioni che "conservano qualche cosa"; si comprende quindi l'interesse del concetto di gruppo per la geometria, dove la simmetria regna sovrana, e per le scienze fisiche, nelle quali le regolarità formano l'essenza stessa delle leggi.

Se si considera un triangolo equilatero e l'insieme dei movimenti che si possono effettuare nello spazio tridimensionale per riportare il triangolo nella stessa posizione, si scopre che ad esso risulta associato un insieme di sei *trasformazioni* geometriche che ne conservano la posizione nello spazio tridimensionale: tre rotazioni intorno al punto di intersezione dei suoi tre assi e tre *riflessioni*, movimenti che portano il triangolo a ribaltarsi rispetto ai suoi assi. Non è banale osservare che queste operazioni possono essere combinate fra loro a due a due: effettuando in sequenza due rotazioni la posizione raggiunta è identica a quella che si ottiene in seguito a una singola rotazione o riflessione appartenente all'insieme già individuato. Il discorso vale anche se si combinano insieme una rotazione e una riflessione. Sono trasformazioni di simmetria, che lasciano invariato l'oggetto considerato perché nessuno sarebbe in grado di dire quale operazione è stata effettuata senza averla effettivamente osservata con i suoi stessi occhi. A differenza della geometria euclidea che studia le proprietà statiche delle figure geometriche, queste *operazioni* mettono la simmetria in atto, sono *trasformazioni* capaci di agire nel piano o nello spazio, che si possono *comporre* tra loro riottenendo ogni volta uno degli elementi dell'insieme di partenza. Il concetto di fondo è quello di considerare il gruppo delle operazioni che *trasformano* una figura in un'altra come una collezione di *oggetti astratti*, suscettibili di far parte di una qualche forma di calcolo. La nozione di *gruppo* è così semplice che chiunque ne può afferrare l'idea di base, eppure è così profonda che i matematici hanno lavorato per 150 anni prima di scoprire la maggior parte dei suoi segreti. La *struttura di gruppo permette di trasformare un insieme di oggetti (elementi del gruppo) nel medesimo insieme* e questo è esattamente ciò che intendiamo per *operazione di simmetria*: un oggetto si trasforma in se stesso senza che alla fine nulla possa distinguerlo dall'oggetto di partenza. Allo stesso tempo, se si conosce il gruppo delle simmetrie di un oggetto, è possibile *fare previsioni* sulla forma completa a partire da una delle sue parti. Per esempio, se è simmetrico per riflessione è sufficiente conoscerne una metà per sapere come è fatta l'altra.

L'idea di simmetria sembra ancorata in profondità nello spirito dell'uomo, che per millenni ne ha fatto un uso sistematico nell'arte e nella decorazione, ma stranamente questi concetti hanno giocato un ruolo importante nella scienza soltanto a partire dal Novecento. Infatti, il concetto di *gruppo* si è sviluppato partendo da problemi molto complessi e dopo un cammino lento e tortuoso.

Il substrato su cui ha germogliato l'idea di *gruppo* è stato quello che oggi chiamiamo il *gruppo delle permutazioni*. Se si considerano due oggetti (oggetti la cui natura resta non specificata, a conferma della straordinaria generalità di queste idee), etichettati convenzionalmente attraverso i numeri 1 e 2, esiste una sola possibilità di disporli diversamente: scambiarli tra loro. L'operazione di *trasposizione*, per la quale l'oggetto 1 va ad occupare il posto dell'oggetto 2 e viceversa (1⇔2), effettuata sulla configurazione di partenza 1 2 ha come risultato la disposizione 2 1, espressa simbolicamente come 1 2→2 1. Esiste anche la possibilità di combinare due trasposizioni che scambiano ciascun oggetto con se stesso (per esempio: 1⇔1) attraverso un'operazione di composizione che si ottiene applicando la seconda trasposizione al risultato ottenuto con la prima (1⇔1 © 2⇔2); l'effetto della *trasposizione identità* è quindi quello di lasciare la situazione immutata: 1 2→1 2.

Se gli oggetti sono tre (1, 2, 3) si possono effettuare tre trasposizioni semplici, cioè tutte quelle che scambiano tra loro soltanto due fra i tre oggetti (s_1=1⇔2, s_2=1⇔3, s_3=2⇔3). Due nuove particolari trasposizioni si ottengono componendo in successione a due a due le prime tre: s_4 è ottenuta componendo s_1 con s_2 (s_4=1⇔2©1⇔3) mentre s_5 è ottenuta componendo s_1 con s_3 (s_5=1⇔2©2⇔3). L'insieme costituito da queste operazioni include tutti possibili modi di scambiare fra loro tre oggetti, compreso quello di scambiarli con se stessi lasciandone immutata qualunque disposizione (s_0=I=1⇔1©2⇔2©3⇔3). Tutte le altre combinazioni riconducono a uno di questi sei risultati.

Il gruppo delle permutazioni su tre oggetti, che i matematici chiamano S(3), è quindi formato da sei elementi s_i, ciascuno dei quali agisce sempre modificando l'ordine dei tre oggetti: $s_0 = I$ (1 2 3→1 2 3), s_1 (1 2 3→2 1 3), s_2 (1 2 3→1 3 2), s_3 (1 2 3→3 2 1), s_4 (1 2 3→2 3 1), s_5 (1 2 3→3 1 2). È un gruppo, perché verifica i tre assiomi. La legge di composizione consiste nell'applicare la seconda permutazione al risultato ottenuto con la prima così che la permutazione che fornisce lo stesso risultato finale si ottiene attraverso una sorta di "prodotto" delle due: s_3©s_1=s_4. S(3) è un esempio di gruppo *non commutativo*. Infatti la composizione s_1©s_3=s_5 fornisce un risultato diverso da quello che si è ottenuto applicando prima s_1 e poi s_3. Tuttavia in ambedue i casi si ottiene ancora un elemento del gruppo S(3), inoltre è molto semplice verificare che il primo e il secondo assioma sono soddisfatti. Anche il terzo, l'esistenza dell'elemento inverso, è facilmente verificabile: s_3©$s_3 = I$. Componendo s_3 con se stesso si ottiene l'elemento identità, il che vale per ciascuna delle azioni s_i (s_i©$s_i = I$) e quindi ciascun elemento dell'insieme S(3) è il proprio inverso.

Si è trovato che il numero delle permutazioni su un insieme di tre oggetti è uguale a 6, che si può scrivere come 3×2×1. Questo prodotto effettuato su un insieme di numeri da 1 a 3 si denota con il simbolo 3! Nel caso più generale di n oggetti il numero delle permutazioni è proprio $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times 3\times 2\times 1$. A ciascuno di questi n! modi diversi per effettuare lo scambio resta analogamente associato un elemento del gruppo S(n), chiamato anche *gruppo simmetrico*, in questo caso su n elementi.

Fin qui il tutto sembra avere l'aria di un "gioco", senza altra funzione apparente che quella di contare tutti i possibili modi per scambiare tra loro n oggetti. Tuttavia, il gruppo delle permutazioni è molto importante, perché si può dimostrare che ogni gruppo può essere espresso in termini di un opportuno gruppo di permutazioni; inoltre, ha avuto un ruolo essenziale, e del tutto imprevedibile a priori, nell'ambito di un problema che ha ossessionato i matematici fino all'inizio dell'Ottocento. A quell'epoca, circa trecento anni di sforzi non erano stati sufficienti ad ottenere una soluzione per radicali dell'equazione generale di grado uguale o superiore a cinque, un problema fondamentale per l'algebra. La soluzione dell'equazione generale di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, già nota ai Babilonesi, richiede l'estrazione della radice quadrata di una funzione dei coefficienti, cioè b^2-4ac; quindi l'equazione di secondo grado è risolubile per radicali. Schiere di matematici erano arrivati a dubitare dell'esistenza di una tale soluzione generale anche se esistevano molte equazioni speciali risolubili per radicali.

Lo studio delle permutazioni divenne cruciale nell'opera di un giovanissimo matematico francese, Evariste Galois. Fu ucciso in duello nel maggio del 1832, a soli 21 anni, ma passò la notte prima della sua morte a redigere un resoconto completo delle sue ricerche. Il "testamento matematico" di Galois ha finito col cambiare completamente il volto della matematica, fornendo ai matematici, e non solo, lavoro per i secoli successivi.

Galois, il primo a usare il termine *gruppo*, propose di "saltare a pié pari i calcoli" e di ragionare sulle "condizioni di risolubilità delle equazioni", in particolare di analizzare quello che lui chiama il "gruppo dell'equazione". Nel decretare "la liquidazione del calcolo come metodo" Galois introdusse uno spirito del tutto nuovo in matematica spostando il suo interesse dalla ricerca delle soluzioni delle equazioni alle relazioni che intercorrono tra di esse. Egli scoprì che le proprietà caratteristiche delle radici di una equazione risiedono nelle permutazioni che mantengono tra di loro certe relazioni. In questo modo riuscì a provare che a partire dal quinto grado le equazioni algebriche non sono generalmente risolubili per radicali. Il lavoro di Galois andava tuttavia ben al di là della risoluzione di un problema dell'algebra, che pure costituiva di per sé un enorme risultato. La "semplificazione intellettuale" di Galois consisteva nel far passare la *struttura* (il gruppo delle permutazioni delle radici) davanti all'oggetto (le radici) e quindi nel definire quest'ultimo a partire dalla struttura. In questo caso la struttura è una *legge di invarianza* di certe relazioni tra le radici, oggetti ancora sconosciuti, e che possono anche restare tali se l'equazione non è risolubile, ma sulle quali non si sarebbe saputo nulla senza la scoperta di questa struttura. Non era attraverso calcoli voluminosi che si poteva decidere la questione della risolubilità, ma piuttosto attraverso l'analisi della struttura del *gruppo delle permutazioni*.

Un indizio della profondità di queste osservazioni viene fornito proprio da quanto si è visto riguardo all'insieme delle operazioni che conservano la forma di una figura. L'aver contato quante sono le operazioni che si possono effettuare lasciando invariata una figura, fornisce una prima valutazione di quanto essa sia "simmetrica", di come si comporterà rispetto alle trasformazioni geometriche. Un cubo è più simmetrico di un parallelepipedo: ci sono più movimenti possibili che lo riportano a coincidere con se stesso. Una sfera è l'oggetto geometrico più simmetrico che si possa immaginare; in termini di rotazioni si può esprimere dicendo che il cubo e il parallelepipedo hanno un numero finito di "assi di simmetria", mentre esistono infiniti assi rispetto a cui una sfera può ruotare restituendoci sempre un'immagine identica a se stessa: tutti quelli che passano per il suo centro, cioè l'intero gruppo SO(3) delle rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale. Qualsiasi descrizione matematica utilizzata per descrivere la sfera resta invariata sotto questo gruppo di trasformazioni.

Matematica e teoria dei gruppi

Il primo ad aver esplicitamente affermato che la nozione di gruppo è indipendente dagli oggetti a cui viene applicata, sembra sia stato il matematico britannico Arthur Cayley nel 1854, quasi 25 anni dopo la memoria pionieristica di Galois. Negli anni successivi apparve chiaro che molti tipi di "oggetti matematici", considerati nel loro insieme, erano dotati delle caratteristiche di un gruppo.

Nel 1872 il matematico tedesco Felix Klein, a quell'epoca appena ventiduenne, formulò un programma, che divenne noto come *Erlanger Programm* basato sull'unificazione della geometria mediante la teoria dei gruppi. Secondo Klein ciò che è importante non sono più le figure geometriche, ma i gruppi di trasformazioni che le lasciano invariate. In base a questo approccio unificato, ciascuna geometria può essere ricondotta allo studio dei movimenti e delle proprietà di uno spazio che sono *invarianti* sotto un particolare gruppo di trasformazioni. La vecchia unità, apparentemente monolitica, era finita. Nell'accettare lo studio della struttura del gruppo come un programma di ricerca, Klein proponeva una nuova visione unificata e "democratica" in cui le geometrie euclidee e non euclidee avevano lo stesso *status*: una geometria è costituita da un insieme di punti e da un gruppo di trasformazioni che spostando le figure nello spazio ne conservano le proprietà caratteristiche. Riconsiderata da questo punto di vista la stessa geometria euclidea non è che una geometria caratterizzata dal gruppo (infinito) delle traslazioni e delle rotazioni.

Klein aveva scoperto il fascino della teoria dei gruppi insieme a un altro giovane matematico, il norvegese Sophus Lie. Durante un viaggio a Parigi erano stati influenzati dal matematico Camille Jordan, che proprio all'epoca aveva pubblicato il primo trattato sistematico sulla teoria dei gruppi di permutazioni. Verso la fine dell'Ottocento, nell'ambizione di creare per le equazioni differenziali una teoria analoga a quella formulata da Galois per le equazioni algebriche, Lie cominciò a studiare intensivamente i sistemi di equazioni alle derivate parziali, una ricerca che lo portò a studiare la struttura dei gruppi continui infinito-dimensionali. I cosiddetti "gruppi di Lie", che aprirono la strada a un numero enorme di applicazioni nel campo della matematica e della fisica e che sarebbero diventati fondamentali nelle teorie di gauge sviluppate dai fisici nella seconda metà del XX secolo.

Louis Pasteur e la scuola francese di cristallografia

I cristallografi furono i primi che, in modo del tutto naturale, si dedicarono allo studio delle diverse simmetrie dei cristalli e le usarono per classificarli. Piuttosto che preoccuparsi della natura fisica dei costituenti ultimi di un cristallo, che non potevano essere effettivamente osservati, si concentrarono sulla loro rappresentazione astratta, per mezzo di un reticolo di punti nello spazio.

Attraverso l'analisi dei diversi tipi di reticoli, i cristallografi riuscirono man mano ad identificare le geometrie che caratterizzano le strutture cristalline. Ma la teoria dei gruppi, sviluppata nel corso dell'Ottocento successivamente alle ricerche pionieristiche di Galois, ha permesso di ragionare in forma del tutto generale sulla matematica di un insieme di punti organizzato in un reticolo regolare, che si ripete periodicamente nelle tre direzioni dello spazio. Nel caso del piano, il reticolo si basa su parallelogrammi così che, nel classificare tutte le possibili trasformazioni che sono compatibili con le condizioni di invarianza di un reticolo bidimensionale si trova che non è possibile ricoprire un piano con qualsiasi tipo di poligoni, in particolare con dei pentagoni regolari. Questo spiega come regole ben precise siano all'opera anche nel caso dei mosaici e delle decorazioni di ogni tipo.

Fin dai tempi più antichi, molti secoli prima che la struttura dei gruppi cristallografici venisse scoperta, era nota empiricamente la possibilità di generare motivi periodici nel piano, una constatazione a cui erano giunti i decoratori dei templi egiziani e gli artisti arabi. Negli anni Venti del Novecento il disegnatore olandese Maurits Cornelis Escher restò affascinato dalla ricchezza e dalla bellezza dei motivi ornamentali dell'Alhambra a Granada e studiando gli articoli scientifici originali dedicati all'argomento da matematici e cristallografi venne a conoscenza delle leggi che regolano le possibilità di ricoprimento periodico del piano: le possibili variazioni di simmetria che si possono ottenere rientrano in 17 gruppi fondamentali, che corrispondono ai 17 gruppi cristallografici di simmetria del piano. Un qualsiasi motivo periodico, a prescindere dall'uso del colore, che abbia una "cella elementare" che si ripete all'infinito, ha delle proprietà di simmetria che rientrano necessariamente in uno di tali gruppi.

Nel caso tridimensionale accade che l'invarianza per traslazione finisce col porre dei limiti all'invarianza per rotazione, così che alla fine di un lavoro non indifferente, durato circa 50 anni, si è scoperto verso la fine dell'Ottocento che anche il numero dei gruppi di simmetria permessi nel caso dei cristalli è finito. Esiste solo una infinità numerabile di cosiddetti *gruppi spaziali*: 230 gruppi, per mezzo dei quali è possibile classificare completamente tutte le forme cristalline osservate in natura.

Nel 1847, quando Pasteur si dedicò al lavoro di ricerca per la sua tesi di laurea all'Ècole Normale Supérieure, i problemi di cristallografia erano molto di moda. Jean-Baptiste Biot, che aveva dimostrato che alcune sostanze organiche, come lo zucchero e l'acido tartatico, potevano far ruotare il piano della luce polarizzata, presentò all'Accademia il lavoro del chimico tedesco Mitscherlich secondo il quale le due forme di acido tartarico, e i loro rispettivi sali, i tartrati e i paratartrati avevano la stessa composizione chimica, la stessa forma cristallina con gli stessi angoli, lo stesso peso specifico, la stessa birifrangenza, e di conseguenza gli stessi angoli tra gli assi ottici. Le loro soluzioni acquose avevano la stessa rifrazione, ma mentre la soluzione del tartrato faceva ruotare il piano di polarizzazione, quella del paratartrato era inattiva. Pasteur si chiese subito: "potevano le due forme di acido tartartarico comportarsi diversamente di fronte alla luce polarizzata ed essere ancora identiche in ogni particolare?". Pasteur si accorse che il paratartrato era formato da una miscela di due tipi di cristalli, che erano l'uno l'immagine speculare dell'altro e che ciascuno di essi faceva ruotare la luce polarizzata dello stesso angolo in valore assoluto ma in direzione opposta. Le molecole enantiomorfe sono chimicamente identiche, ma mostrano un comportamento diverso dal punto di vista fisico. Nell'aprire un nuovo campo scientifico, quello delle relazioni tra le proprietà ottiche e la struttura molecolare e cristallina della materia, Pasteur si convinse che solo gli organismi viventi producono composti asimmetrici otticamente attivi, un'affermazione molto vicina alla realtà, che lo guidò nelle successive ben note ricerche che inaugurarono la moderna microbiologia. Oggi si pensa che la preferenza della natura per una delle due forme sia da attribuirsi a cause che hanno origine a livello fisico microscopico.

Pierre Curie e la scoperta della piezoelettricità

Pierre Curie, ispirato dal lavoro di Bravais e di Jordan nel campo della cristallografia, oltre che dalle idee di Pasteur, fu il primo a usare sistematicamente argomenti di simmetria per prevedere fenomeni o l'assenza di essi. La scoperta di un fenomeno fino ad allora sconosciuto come la piezoelettricità, che consiste nella polarizzazione elettrica prodotta dalla compressione o espansione di un cristallo in direzione di un assi di simmetria non fu infatti una scoperta casuale, bensì il risultato di profonde riflessioni sulle proprietà di simmetria sulla natura della materia cristallina, che intorno al 1880 misero in grado i fratelli Pierre e Jacques Curie di prevedere la possibilità di tale polarizzazione. Con una insolita abilità sperimentale rispetto alla loro giovane età, i due giovani riuscirono a fare uno studio accurato del nuovo fenomeno, stabilendo le condizioni di simmetria necessarie a produrre il fenomeno nei cristalli, e ne formularono le semplici leggi quantitative.

Da quel momento Pierre Curie cominciò a fare ricerche di natura teorica sulle relazioni tra la cristallografia e la fisica dedicandosi all'estensione dell'approccio gruppo-teoretico dai cristalli ai sistemi fisici in generale. A questi argomenti dedicò una serie di articoli a partire dal 1884. La sua memoria più importante, "Sulla simmetria dei fenomeni fisici, simmetria di un campo elettrico e di un campo magnetico", inizia con una frase programmatica: "Penso che sarebbe interessante introdurre nello studio dei fenomeni fisici le considerazioni sulla simmetria familiari ai cristallografi". In questo lavoro il principio di simmetria trova la sua formulazione compiuta e definitiva:

"*Quando alcune cause producono certi effetti, gli elementi di simmetria delle cause si devono ritrovare negli effetti prodotti.*

Quando alcuni effetti rivelano una certa dissimmetria, questa dissimmetria si deve ritrovare nelle cause che le hanno dato origine."

È un'idea incontestabilmente profonda e premonitoria allo stesso tempo, perché annuncia l'importanza che oggi attribuiamo ai difetti e alle rotture di simmetria. La situazione in cui la simmetria delle cause non si ritrova negli effetti spiega un gran numero di fenomeni, fino a quelli che fanno parte del mondo delle particelle quantistiche.

Per trovare la simmetria del campo elettrico Curie prende in considerazione il campo creato fra due piastre metalliche circolari parallele, sotto tensione, come le armature di un condensatore. Considerando un punto dell'asse comune alle due piastre, si vede che questo è un asse di isotropia e che tutti i piani passanti per questo asse sono piani di simmetria. La simmetria della causa – le piastre – si deve ritrovare nell'effetto: il campo elettrico ha quindi la simmetria di un tronco di cono. Curie considera poi una sfera conduttrice carica, isolata nello spazio. Essendo conduttrice, resta isotropa malgrado la carica, poiché quest'ultima si ripartisce uniformemente in tutto il volume. Introducendo la sfera tra le piastre una forza agirà sulla sfera in direzione del campo. La dissimmetria degli effetti si deve ritrovare nelle cause: poiché la forza non possiede assi di simmetria normali alla sua direzione, il sistema formato dalla sera carica e dal campo non deve più possedere questo elemento di simmetria. Ma la sfera carica, considerata isolatamente, possiede degli assi di isotropia in tutte le direzioni; la dissimmetria in questione proviene dunque dal campo elettrico che non deve possedere assi di simmetria normali alla sua direzione. Il campo elettrico non può quindi possedere una simmetria cilindrica o sferica; la sua simmetria caratteristica è appunto quella di un tronco di cono.

Il campo elettrico si comporta come un uomo davanti allo specchio, è quindi rappresentabile come un vettore *polare*. Curie nota che lo stesso accade se si considera la simmetria della forza di attrazione gravitazionale agente sulla materia e nel caso di materia animata da una certa velocità.

Curie considera poi il campo magnetico al centro di una spira conduttrice circolare percorsa da corrente. Il campo è nella direzione normale al piano della circonferenza. Consideriamo un piano di simmetria parallelo alla spira. L'immagine sarà identica all'oggetto, poiché l'immagine di un cerchio è un cerchio e il senso della corrente non cambia (vettore parallelo allo specchio): la causa del fenomeno è invariante per simmetria e ugualmente lo sarà l'effetto.

Il campo magnetico possiede dunque un piano di simmetria *ortogonale* alla sua direzione, contrariamente al campo elettrico. In altri termini è identico alla sua immagine in uno specchio posto ortogonalmente, come il personaggio del quadro di Magritte, che si guarda nello specchio e vede la sua nuca al posto del viso. Questo significa che il campo magnetico ha la simmetria di un cilindro in rotazione, ovvero la simmetria di uno pseudovettore, un vettore *polare*. Curie peraltro deplora che la stessa rappresentazione venga usata in entrambi i casi.

Curie osserva che i ragionamenti sulla simmetria provano che uno dei campi (elettrico e magnetico) è polare e l'altro è assiale, ma senza che si possa distinguere fra i due; tutto ciò che si può affermare è che nel designare arbitrariamente quello che tra i due si comporta come polare, l'altro sarà di tipo assiale. Come operare una scelta? Le considerazioni generali sull'elettricità e il magnetismo non possono rispondere a questa questione. Tuttavia è possibile scegliere rispetto all'assoluto facendo appello ad altri fenomeni (elettrochimica, piroelettricità e piezoelettricità, o l'effetto Hall). Tutto ciò, oltre a rappresentare ancora una volta una determinazione delle leggi di simmetria, rende possibile la previsione di nuovi fenomeni.

Sovrapponendo in un corpo un campo elettrico e un campo magnetico nella stessa direzione il comune asse di isotropia dei due campi si conserva, ma non esiste più un piano di simmetria, perché il campo elettrico annulla il piano perpendicolare all'asse e il campo magnetico annulla quello parallelo. Un tale mezzo, o un fenomeno che vi si produce, non è sovrapponibile alla sua immagine in uno specchio. È *enantiomorfo*, cioè un oggetto *chirale*, dotato di chiralità, dal greco *enantios*, che vuol dire "opposto" e *kheir*, che significa "mano". Esistono molecole e cristalli enantiomorfi, ma in generale la chiralità gioca un ruolo fondamentale nella natura.

Nel caso di un corpo sottoposto alla sovrapposizione di due campi allineati – elettrico e magnetico – Curie osserva che si instaura una asimmetria di torsione che è sufficiente a far prevedere l'effetto Wiedemann: se una corrente elettrica percorre un filo di metallo magnetizzato longitudinalmente e sottoposto a un campo magnetico circolare, quale quello prodotto da una corrente che percorra il filo medesimo, il filo si torce, un estremo tende a ruotare rispetto all'altro. Al contrario, se si torce un filo percorso da corrente, questo si magnetizza. Ragionamenti analoghi permettono di prevedere la piezoelettricità, la piroelettricità e l'effetto Hall.

Il gruppo delle trasformazioni dello spazio e del tempo

Col progredire del XIX secolo, la storia della teoria dei gruppi è divenuta sempre più complessa e intimamente connessa con la storia di tutta la matematica, ma tutto questo avrebbe certamente avuto un interesse limitato se fosse restato confinato a questa disciplina. La ragione fondamentale per cui soprattutto la fisica ha subito il fascino dei gruppi è che questa nozione esprime in una forma precisa e immediatamente utilizzabile le idee vaghe e universali di "regolarità" e "simmetria", che sono oggetto di forte interesse per il fisico, costantemente alla ricerca di tutto ciò che si riproduce sempre allo stesso modo nell'insieme confuso di eventi e fenomeni di ogni tipo che caratterizzano il nostro universo.

Le simmetrie considerate da Curie erano simmetrie degli stati fisici. Ma la simmetria come invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni può essere anche vista come una proprietà di relazioni tra grandezze fisiche. Le leggi che governano i fenomeni sono relazioni tra eventi, cioè fra gli elementi dello spazio-tempo. Esistono simmetrie che fanno intervenire la struttura dello spazio e del tempo, piuttosto che quella di oggetti, figure geometriche, fenomeni o particolari sistemi fisici. Queste simmetrie hanno delle conseguenze che riguardano i sistemi fisici in generale e che impongono delle restrizioni relative alla forma matematica delle leggi della natura. Le leggi della meccanica classica di Galilei e di Newton sono invarianti rispetto a tutte le trasformazioni dello spazio euclideo (traslazioni, rotazioni e riflessioni): queste leggi conservano la stessa forma e, di conseguenza, forniscono gli stessi risultati, qualunque sia il sistema di riferimento scelto. La ragione è che lo spazio è un mezzo *omogeneo* (invariante per traslazione: le stesse leggi valgono in tutti i suoi punti, essendo questi ultimi indistinguibili l'uno dall'altro) e *isotropo* (invariante per rotazione: non esiste una direzione privilegiata). Se si considera il tempo come una coordinata supplementare, ciascun punto viene individuato attraverso le sue coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) e la coordinata temporale t è definita anch'essa in rapporto a un'origine t=0 la cui scelta è arbitraria. La conseguenza di tutto ciò è che non è possibile determinare una posizione nello spazio e nel tempo in maniera "assoluta", ma soltanto in modo "relativo", vale a dire in rapporto ad altri oggetti e altri avvenimenti.

L'insieme delle coordinate spazio-temporali forma uno spazio-tempo a quattro dimensioni in cui esiste una classe di sistemi di riferimento particolari, i sistemi *inerziali*, che si muovono in linea retta e a velocità costante l'uno rispetto all'altro e nei quali le leggi della meccanica classica sono invarianti per traslazioni nel tempo. La più generale trasformazione che lega le coordinate di due riferimenti inerziali viene espressa attraverso un insieme di equazioni note come *trasformazioni di Galilei*. L'insieme di tutte queste trasformazioni forma di nuovo un gruppo, il cosiddetto *gruppo di Galilei*, di cui il complesso delle trasformazioni dello spazio euclideo costituisce un sottogruppo. Nel 1632, nel suo *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Galilei aveva esplicitamente osservato che per quanto riguarda le esperienze di meccanica uno stato di quiete o uno stato di moto uniforme sono equivalenti: "...Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma...". È quello che si chiama "principio di Galilei".

Alla fine dell'Ottocento si era constatato che la relatività galileiana è incompatibile con le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo, che risultavano invece invarianti rispetto al cosiddetto *gruppo di Lorentz*, il gruppo delle trasformazioni di coordinate tra sistemi di riferimento in moto con velocità arbitrariamente grandi, prossime alla velocità della luce. Queste trasformazioni, in cui lo spazio e il tempo si mescolano tra loro, insieme alla velocità della luce nel vuoto, furono formulate nel 1904 dal fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz per spiegare *a posteriori* il risultato dell'esperimento effettuato da Michelson e Morley, volto a individuare una eventuale differenza nella velocità della luce misurata in due direzioni diverse rispetto al moto della Terra. Nell'osservare che formano un gruppo, il matematico francese Henri Poincaré trovò che tali trasformazioni possono essere caratterizzate dalle sostituzioni lineari delle quattro variabili x, y, z e t che lasciano invariante la forma quadratica $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$. Poincaré fu il primo a notare l'invarianza in forma delle equazioni di Maxwell rispetto al gruppo esteso a 10 parametri delle trasformazioni di Lorentz (il gruppo a 6 parametri delle rotazioni più il gruppo delle traslazioni spazio temporali). Osservò anche che il gruppo di Lorentz può essere considerato un gruppo di rotazioni nello spazio a quattro dimensioni.

Nel 1905 Einstein affrontò queste problematiche da un punto di vista completamente diverso. Einstein mostrava scarso interesse verso i problemi della teoria dell'elettrone e le relative indagini matematiche di cui si occupavano Lorentz, Sommerfeld, Voigt, Abraham e molti altri fisici. Non gli interessavano i modelli dell'elettrone e i problemi concernenti la natura dell'etere e della materia, semplicemente rifiutava la nozione di etere, di un sistema di riferimento assoluto. Partendo dal postulato che le leggi della fisica debbano restare invariate rispetto a sistemi di riferimento in moto relativo uniforme – il "principio di relatività di Galilei" – Einstein aggiunse un secondo postulato, secondo cui la velocità della luce nel vuoto deve essere la stessa se misurata da tali osservatori. Come conseguenza di questi due principi Einstein deduceva proprio le *trasformazioni di Lorentz*, le stesse leggi di trasformazione per il campo elettromagnetico – e l'associata proprietà di gruppo ("tali trasformazioni – come deve essere – formano un gruppo") – che Lorentz e Poincaré avevano posto *ad hoc* allo scopo di ottenere l'invarianza delle leggi dell'elettrodinamica in tutti i sistemi di riferimento in moto uniforme. Ma il ragionamento di Einstein si estendeva ben al di là dell'elettrodinamica di Lorentz, come egli stesso ricordò più tardi: "La novità stava nel capire che le trasformazioni di Lorentz trascendevano la loro stessa connessione con le equazioni di Maxwell e riguardavano invece la natura dello spazio tempo in generale".

La relatività speciale di Einstein del 1905 introduceva una sensazionale novità. La legge $E=mc^2$ implica che massa ed energia possono trasformarsi l'una nell'altra: le antiche e consolidate leggi di conservazione della massa e dell'energia si fondevano nell'unica legge di conservazione della massa-energia.

Dalla simmetria alle equazioni del campo. Einstein e la teoria generale della relatività

Un enorme salto di qualità è costituito dall'utilizzazione della simmetria come uno strumento per imporre *a priori* l'invarianza delle leggi, espresse attraverso equazioni matematiche, rispetto a dati gruppi di trasformazioni.

La nozione chiave di *invariante* al centro della formulazione di Minkowski della relatività speciale. Una particella in moto traslatorio uniforme descrive un invariante 4-dimensionale, la sua "linea d'universo", in cui l'elemento $d\tau = (1/c)(c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2)^{1/2}$ rappresenta fisicamente il tempo proprio misurato da un orologio in quiete rispetto alla particella stessa. Il 21 settembre 1908, a Colonia, Minkowski iniziava la sua celebre conferenza *Raum und Zeit* con queste parole: "La visione dello spazio e del tempo che voglio prospettarvi scaturisce dalla fisica sperimentale; in questo risiede la sua forza. Le implicazioni sono radicali. Da ora in poi lo spazio e il tempo di per se stessi sono destinati a sparire nell'ombra e soltanto una sorta di unione fra i due conserverà una realtà indipendente".

Il lavoro di Minkowki sull'invarianza delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica rispetto alle trasformazioni di Lorentz lo condusse alla scoperta della struttura matematica alla base dei fenomeni fisici e a un nuovo concetto di spazio e di tempo che divenne vitale per la generalizzazione della teoria della relatività. In quello stesso periodo Einstein iniziò a perseguire il suo obiettivo euristico di formulare una teoria relativistica della gravitazione che combinasse strategie matematiche con la ricerca di un significato fisico. Nella teoria speciale le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico erano state derivate come conseguenza dell'invarianza relativistica, che a sua volta determinava largamente la forma delle equazioni di Maxwell. Questo profondo cambiamento di atteggiamento diventa ancora più radicale nella ricerca che Einstein intraprende verso la teoria generale della relatività a partire dall' assunto che "le leggi della fisica devono essere di natura tale da valere in sistemi di riferimento *in moto arbitrario*" e non già solo in quelli in moto uniforme, come richiedeva la relatività speciale. Il 29 ottobre 1912 Einstein, completamente immerso nel problema della teoria della gravitazione, scriveva a Sommerfeld: "Ma una cosa è certa, in tutta la mia vita non ho mai lottato così duramente. Un grande rispetto per la matematica si è insinuato dentro di me, la parte più sottile della quale, nella mia dabbenaggine, avevo considerato puramente voluttuaria". Nell'adottare i metodi tensoriali, che inizialmente aveva criticato in Minkowski, Einstein si arrese completamente alla necessità di padroneggiare quella che la maggior parte dei matematici consideravano una branca esoterica della disciplina: il calcolo differenziale assoluto. Il che non deve destare meraviglia, considerando che al volgere del secolo i matematici mostravano lo stesso atteggiamento "conservatore" nei confronti dell'analisi vettoriale. L'analisi tensoriale si occupa di invarianti geometrici, quantità geometriche che hanno una esistenza indipendente da qualsiasi scelta delle coordinate, in modo tale che quantità intrinseche come la curvatura e le curve geodetiche restano invariate in seguito a una qualsiasi trasformazione di coordinate. La descrizione di queste quantità è l'obiettivo dell'analisi tensoriale, che Gregorio Ricci-Curbastro sviluppò nel corso di 15 anni, dal 1884 fino alla fine del secolo, quando cominciò a lavorare con il suo studente Tullio Levi-Civita. Nel loro fondamentale lavoro *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (1901) il nuovo algoritmo viene presentato insieme a una serie di applicazioni, come la classificazione delle forme differenziali quadratiche e una serie di problemi di fisica matematica. Nonostante ciò, il calcolo tensoriale veniva considerato quasi un artificio formale.

Nei suoi sforzi di derivare la teoria a partire da un singolo principio di simmetria, il principio di equivalenza che trova la sua espressione formale nel principio di covarianza generale (equivalenza di tutti i sistemi di riferimento nella descrizione delle leggi fisiche), Einstein stava rivoluzionando il modo di fare fisica teorica. In un certo senso seguiva la procedura di Minkowski, secondo cui bisognava partire dall'invarianza di Lorentz e richiedere che le equazioni del campo fossero covarianti rispetto a questa trasformazione. Un principio di simmetria locale (l'invarianza delle leggi di natura sotto cambiamenti locali di coordinate spazio-temporali) doveva determinare la dinamica della gravità, dello spazio-tempo stesso. Einstein si muoveva secondo lo schema: simmetria → equazioni del campo. Quello che prima veniva derivato a posteriori ora diventava un principio. Era una rottura radicale con il passato, il processo veniva completamente rovesciato rispetto allo stile ottocentesco, quando lo schema seguito era: esperimento → equazioni di campo → simmetria (invarianza). L'invarianza di Lorentz era stata infatti trovata come una pura proprietà matematica delle equazioni di Maxwell, che a loro volta erano state formulate fondamentalmente sulla base delle leggi sperimentali dell'elettromagnetismo.

Il "principio generale di relatività", la richiesta di invarianza rispetto ad arbitrarie trasformazioni di coordinate, è una richiesta di simmetria applicata al linguaggio in cui si formula una legge fisica, ben più forte della legge stessa. I vincoli imposti dalla simmetria aprirono la strada che permise ad Einstein di derivare le equazioni per il campo gravitazionale: è la simmetria a dettare l'interazione tra le masse. Da Einstein in poi la fisica non ha più potuto formulare teorie che non fossero *a priori* teorie relativistiche. Quando nel 1928 Dirac propose la sua equazione relativistica per l'elettrone e fornì la prima soluzione del problema di esprimere la teoria quantistica in una forma invariante sotto il gruppo di Lorentz della relatività speciale, i concetti di simmetria e invarianza che erano stati al centro delle teorie di Einstein erano state completamente assimilati dalla fisica teorica. Ma l'equazione di Dirac nascondeva delle implicazioni sorprendenti. Il concetto di antimateria che di lì a poco sarebbe scaturito da questo tipo di formulazione avrebbe dato inizio a una nuova era per la fisica del Novecento.

Sulla scia di Einstein, il matematico tedesco Hermann Weyl, un vero virtuoso della teoria dei gruppi, trovò nel 1918 che imponendo l'invarianza rispetto a un particolare tipo di trasformazione relativa alla geometria di spazi astratti, si trovava che la carica elettrica è una quantità conservata. Le cosiddette *trasformazioni di gauge*, rivisitate da Weyl nel 1929 nell'ambito della meccanica quantistica, erano destinate ad avere un ruolo gigantesco nella fisica moderna. La simmetria di *gauge* è una simmetria *locale*, nel senso che le trasformazioni di questo gruppo possono essere scelte in modo diverso in ciascun punto dello spazio e del tempo, al contrario delle simmetrie *globali* che si applicano allo stesso modo in tutti i punti dello spazio-tempo. Per rendere invariante una teoria rispetto a una trasformazione locale, si deve aggiungere qualcosa di nuovo: una forza. Nelle *teorie di gauge* le interazioni fondamentali sono le inevitabili conseguenze di operazioni di simmetria locali e sono indispensabili per mantenere la simmetria. La via iniziata da Einstein ha costituito il modello che ha dato origine alle varie teorie di campo del secondo Novecento, a partire dalla versione moderna della teoria di gauge formulata da Yang e Mills nel 1954. Le quattro forze fondamentali della natura – gravità, elettromagnetismo, interazione debole e interazione forte – vengono oggi descritte da teorie di questo tipo.

Emmy Noether e la simmetria delle leggi

La teoria della relatività è in realtà una "teoria dell'invarianza", come inizialmente veniva chiamata dallo stesso Einstein. Al concetto di *invariante* come qualcosa che non cambia effettuando un insieme di trasformazioni, corrisponde appunto l'*invarianza* come proprietà di essere invariante. In fisica gli *invarianti* sono in genere quantità conservate dalle simmetrie del sistema, che non cambiano nel corso del tempo. Alla fine dell'Ottocento i fisici avevano ben chiara l'esistenza di quantità conservate grazie all'esistenza di alcune particolari simmetrie delle equazioni dinamiche sotto particolari trasformazioni.

La storia delle leggi classiche di conservazione risale a Lagrange, Hamilton e soprattutto Jacobi. Nel corso dell'ultima decade del secolo XIX apparvero diversi lavori connessi a metodi per ottenere costanti del moto per mezzo di coordinate cicliche, che dimostravano la connessione fra trasformazioni di simmetria e quantità conservate in meccanica come l'energia, l'impulso, il momento angolare e il moto del centro di massa. Tuttavia fu Emmy Noether, una matematica tedesca la cui opera fu giudicata da Einstein un vero e proprio monumento del pensiero umano, a dare una forma matematica rigorosa e del tutto generale a questa relazione, fornendo così ai fisici teorici uno strumento e una ragione per cercare nuove simmetrie.

La connessione tra le leggi classiche di conservazione e le corrispondenti simmetrie dello spazio-tempo aveva interessato Felix Klein per molti anni. La genesi del lavoro di Emmy Noether era strettamente legata al lavoro del matematico tedesco David Hilbert sulla relatività generale e al profondo interesse di Klein verso alcuni problemi non risolti che riguardavano la conservazione dell'energia e dell'impulso nella teoria. Tra la fine di giugno e i primi di luglio del 1915 Einstein era stato invitato a tenere sei conferenze a Göttingen. A quest'epoca Einstein non aveva ancora completato la teoria, che presentava alcuni problemi. I progressi più importanti risalgono al periodo tra l'ottobre e il novembre di quell'anno. Il 25 novembre Einstein aveva presentato all'Accademia prussiana la versione definitiva delle equazioni del campo gravitazionale – "la scoperta più preziosa della mia vita" – che rappresentavano il completamento della struttura logica della teoria. Il 20 novembre Hilbert aveva sottoposto a sua volta all'Accademia delle scienze di Göttingen una nota – "Grundlagen der Physik" (Fondamenti della fisica) – nella quale derivava le equazioni definitive del campo gravitazionale come soluzione di un problema variazionale. Alla fine del suo lavoro Hilbert magnificava il "metodo assiomatico" che aveva utilizzato impiegando "i più potenti strumenti dell'analisi, ovvero il calcolo delle variazioni e la teoria degli invarianti".

Il fondamentale lavoro di Emmy Noether, *Invariante Variationsprobleme* fu presentato da Felix Klein alla Königlische Gesellschaft der Wissenschaften di Göttingen il 26 luglio 1918 e conteneva quello che divenne successivamente noto come il *teorema di Noether*. Il teorema rappresentava il trionfo dei gruppi di Lie, stabilendo una relazione tra leggi di conservazione, simmetrie e principi di invarianza in una formulazione del tutto generale, attraverso la dimostrazione che dalle invarianze delle equazioni per traslazioni temporali, rotazioni e traslazioni spaziali seguono le leggi di conservazione, rispettivamente, dell'energia, del momento angolare e dell'impulso. L'esistenza, per ogni sistema isolato, di queste costanti del moto, vale per la fisica newtoniana quanto per la relatività ristretta. Queste leggi sono appunto l'espressione dell'omogeneità del tempo, dell'isotropia e dell'omogeneità dello spazio. In generale, se un sistema fisico è invariante sotto un certo gruppo di trasformazioni che riportano il sistema in se stesso, il *teorema di Noether* asserisce che da queste proprietà di simmetria segue la conservazione di una quantità fisica del sistema.

Teoria dei gruppi e meccanica quantistica

Le trasformazioni di Lorentz possono essere rappresentate come delle rotazioni nello spazio-tempo a quattro dimensioni. In questo modo si ottiene l'immagine di un gruppo "fisico" attraverso un altro gruppo più "astratto", più facile da maneggiare. Questi due gruppi sono appunto *isomorfi*. Se una trasformazione è dotata di più immagini i due gruppi si dicono *omomorfi*. Un metodo efficace per studiare i gruppi astratti consiste nello stabilire una corrispondenza che assegna una matrice ad ogni elemento del gruppo. Una *rappresentazione* per sostituzione lineare di un gruppo consiste quindi nell'individuare un gruppo di matrici omomorfo al gruppo da rappresentare. La teoria delle rappresentazioni dei gruppi per mezzo delle trasformazioni lineari fu creata principalmente da Frobenius nel corso degli anni 1896-1903. Lo strumento matematico appropriato per far sì che un gruppo di trasformazioni di simmetria agisca su altri oggetti (come la funzione d'onda della meccanica quantistica) consiste appunto in una rappresentazione del gruppo. Una rappresentazione n-dimensionale D di un gruppo G si definisce come segue: a ciascun elemento $g \in G$ si associa una matrice $n \times n$ $D(g)$ (cioè un operatore lineare su uno spazio vettoriale n-dimensionale) tale che la struttura del gruppo venga conservata: $D(gg') = D(g)D(g')$. Se la corrispondenza $g \rightarrow D(g)$ è uno a uno, l'insieme di tutte le $D(g)$ forma un gruppo isomorfo al gruppo originale G. Una rappresentazione di un gruppo è quindi un insieme di numeri dotato di una regola di trasformazione tale che ciascuna operazione del gruppo produce una ben definita trasformazione dei numeri. Le trasformazioni che appartengono a una rappresentazione sono ristrette a quelle lineari. Se una particolare trasformazione manda p in p' e q in q', allora manda anche $p+q$ in $p'+q'$. Un semplice esempio è costituito dalla rappresentazione di $O(3)$: il gruppo di tutte le possibili rotazioni intorno a un punto fisso nello spazio tridimensionale è rappresentato dall'insieme delle tre coordinate (x, y, z) che determinano la posizione nello spazio di qualsiasi punto P. Quando viene applicata una rotazione il punto P si sposta in una nuova posizione P' con coordinate x', y', z' e questo determina la regola di trasformazione per x, y, z.

L'immenso potere della teoria dei gruppi in fisica deriva dal fatto che le leggi della meccanica quantistica prescrivono che quando un oggetto fisico possiede una simmetria esiste un ben definito gruppo G di operazioni che la conservano e inoltre i possibili stati quantici dell'oggetto sono in esatta corrispondenza con le rappresentazioni di G. I matematici hanno individuato e classificato i gruppi e le loro rappresentazioni, indipendentemente dalla situazione fisica a cui i gruppi possono essere applicati. Da tutto ciò risulta possibile fare una teoria puramente astratta delle simmetrie delle particelle fondamentali basata sulle qualità astratte dei gruppi e delle loro rappresentazioni, evitando qualsiasi modello meccanico o dinamico arbitrario.

Negli anni venti Eugen Wigner, un fisico di origine ungherese, mostrò che la teoria dei gruppi poteva essere utilizzata per classificare i livelli energetici degli atomi, mostrando che la struttura dell'insieme degli stati atomici non dipende dai dettagli della dinamica, ma solo dalle proprietà di simmetria dell'atomo stesso rispetto alle rotazioni, alle riflessioni spaziali e alla libertà di scambiare fra loro gli elettroni grazie alla loro indistinguibilità, una caratteristica senza analogo classico. Il gruppo delle permutazioni e il gruppo delle rotazioni trovarono un'applicazione inedita nella nuova meccanica quantistica da parte di Wigner, Weyl, von Neumann e altri, mostrando non soltanto che molte proprietà dei sistemi atomici potevano essere dedotte attraverso l'analisi delle simmetrie dei sistemi stessi, senza che fosse necessario risolvere esplicitamente le equazioni, ma soprattutto facendo intravvedere che la simmetria del mondo microscopico si esprimeva attraverso il linguaggio matematico della teoria dei gruppi. Nonostante ciò molti anni dovevano ancora passare perché questo strumento matematico venisse riscoperto e accettato dai fisici, il cui rifiuto fu inizialmente tanto forte che all'epoca si parlava di "peste dei gruppi". Per un po' la teoria dei gruppi venne accantonata, a parte rare eccezioni, tra cui il fisico italiano Giulio Racah che la utilizzò con successo tenendo anche dei corsi verso la fine degli anni Quaranta.

I gruppi prendono il potere

Negli anni Cinquanta i fisici sperimentali rischiavano di doversi trasformare in "botanici", intenti a trovare un nome alle innumerevoli particelle nuove che man mano venivano scoprendo, sia nei raggi cosmici sia utilizzando gli acceleratori. I fisici teorici dal canto loro si dibattevano nelle più grandi difficoltà cercando una spiegazione del perché le particelle di questo "zoo" si presentassero con quelle specifiche proprietà e non altre. Per di più alcune di esse si comportavano in modo così sconcertante da essere state già battezzate "particelle strane". Fino alle soglie del 1957 nessuno aveva mai dubitato che le leggi della fisica dovessero valere anche "dentro lo specchio", così che un esperimento condotto in un laboratorio reale sarebbe risultato indistinguibile dalla sua immagine speculare. Il 16 gennaio 1957 il "New York Times" comunicò al mondo intero una notizia shock che aveva già profondamente scombussolato la comunità dei fisici: il decadimento beta, un processo durante il quale un elemento radioattivo decade trasformandosi in un nuovo elemento ed emettendo un elettrone, non è invariante per trasformazioni che invertono il segno di tutte le coordinate spaziali. La consolidata credenza che la natura esibisca invariabilmente la simmetria speculare andava in tal modo in frantumi. Qualcosa di analogo accadeva anche nel corso del decadimento delle "particelle strane", il "puzzle" poteva essere finalmente spiegato. Nel corso di questi processi, in cui interviene la cosiddetta *interazione nucleare debole*, la *parità* (P), come la chiamano i fisici, non si conserva. Questo tipo di simmetria, insieme all'invarianza per inversione temporale (T), è una *simmetria discreta*, o *discontinua*, a differenza di trasformazioni come le rotazioni e le traslazioni, che avvengono con continuità, attraverso passi arbitrariamente piccoli. La terza simmetria discreta, che gioca un ruolo importante nel campo delle particelle elementari, è la *coniugazione di carica* (C), che scambia una particella con l'antiparticella, e viceversa. Un teorema ha dimostrato che qualsiasi teoria è invariante sotto la trasformazione complessiva del gruppo di simmetria CPT, anche se questo non accade nei casi specifici di C, P e T.

Nonostante queste novità sconvolgenti la fisica aveva ormai introiettato un profondo rapporto di fiducia nei confronti delle leggi di conservazione, il cui ruolo e importanza erano straordinariamente aumentati rispetto alla fisica classica. Il punto di vista era cambiato: invece di un insieme di leggi deterministiche che predicono esattamente cosa può accadere, ora erano proprio le leggi di conservazione a determinare *cosa non può accadere*. Nel corso di eventi che vedono particelle trasformarsi in altre particelle una serie di leggi di conservazione deve sempre essere rispettata. Per risolvere un altro degli enigmi degli anni Cinquanta si ipotizzò la conservazione di un nuovo numero quantico che distingueva gli elettroni dai muoni, il che implicava l'esistenza di un secondo tipo di neutrino accanto a quello elettronico, che fu puntualmente scoperto nel 1962. Un esempio eclatante della potenza delle leggi di conservazione applicate alla fisica delle particelle elementari.

Le interazioni tra particelle che hanno luogo in questi processi possono essere interpretate come trasformazioni di tipo matematico. Alcune di queste trasformazioni sono strettamente legate alle trasformazioni dello spazio-tempo, mentre altre, che hanno luogo nei cosiddetti *spazi interni* delle particelle, rappresentano trasformazioni fisiche. Nei primi anni Sessanta molti fisici compresero che la teoria dei gruppi poteva essere utilizzata partendo dal punto di vista che anche le leggi di conservazione a cui obbediscono le particelle devono derivare dalle simmetrie sottostanti, simmetrie di tipo del tutto nuovo, caratteristiche delle particelle elementari. Già nel 1939 lo stesso Wigner aveva mostrato che le particelle elementari si comportano come se fossero elementi di un gruppo. Naturalmente tutte le trasformazioni che conservano qualche proprietà possono formare un gruppo; infatti la potenza del metodo apparve chiara nel 1964, quando venne scoperta la particella Ω^-, che occupava un posto rimasto vuoto nello schema con cui 10 particelle erano state classificate e raggruppate in base a SU(3), un gruppo formato da otto elementi.

In quegli anni si instaurò così una crescente fiducia nella possibilità di utilizzare i principi di simmetria per costruire teorie; ormai i fisici avevano preso una tale dimestichezza con la teoria dei gruppi da riuscire ad utilizzarla per prevedere l'esistenza dei *quark*, i mattoni costitutivi del protone, del neutrone e dei mesoni. Per rientrare nello schema del gruppo SU(3) i *quark* dovevano avere una carica frazionaria, laddove tutte le particelle note fino a quel momento avevano carica intera. Sebbene nessuno avesse mai visto nemmeno la loro ombra, la teoria funzionava così bene che era difficile non accettarli. Circa quattro anni dopo, verso il 1968, gli acceleratori di particelle cominciarono a fornire le prime prove evidenti dell'esistenza di queste entità ipotetiche: era il trionfo della teoria dei gruppi in fisica, che avrebbe avuto in seguito importanti sviluppi in una teoria basata sempre su SU(3) e chiamata *Quantum chromodynamics* (QCD), la moderna teoria delle interazioni forti fra quarks, basate sulla cosiddetta "simmetria di colore". Ciascun quark esiste in tre stati di un nuovo numero quantico chiamato "colore" e interagiscono attraverso lo scambio di particelle di spin 1 chiamate *gluoni*, in analogia con le particelle elettricamente cariche che interagiscono per via elettromagnetica attraverso lo scambio di fotoni di spin 1.

Finalmente i pezzi del gigantesco puzzle cominciarono ad andare al loro posto e tuttavia i fisici sapevano anche bene che l'universo è pieno di "assenza di simmetria", come già sottolineato da Pierre Curie il quale aveva intuito che l'"assenza" di elementi di simmetria è ciò che ci rivela l'esistenza dei fenomeni. Se tutto è simmetrico significa che non si riesce ad osservare nulla. Un fenomeno del genere si presenta nei materiali ferromagnetici, nei quali, al di sopra di una certa temperatura critica i "magneti" elementari sono orientati a caso in tutte le direzioni e il sistema è invariante rispetto a SO(3), il gruppo delle rotazioni. In virtù della simmetria del problema, ogni direzione di magnetizzazione è ugualmente probabile. Quando la temperatura scende si ha un cambiamento di stato, i magneti atomici si allineano in coppie che gradualmente formano piccoli domini magnetici. La comparsa di una simmetria spezzata è caratteristica di un sistema formato da un gran numero di particelle: la magnetizzazione spontanea rompe l'invarianza della situazione precedente e nulla fa sospettare dell'iniziale simmetria esistente a temperature più alte. Il concetto di rottura di simmetria si rivelò cruciale per le teorie che descrivono le particelle fondamentali.

Nonostante i primi successi della teoria dei gruppi applicata alla fisica delle particelle, i teorici erano tormentati da un problema, quello di rendere conto dell'effettiva mancanza di simmetria in una serie di fenomeni osservati, primo tra tutti la differenza di massa tra particelle appartenenti alla stessa famiglia: i fotoni, bosoni a massa nulla, vettori delle interazioni elettromagnetiche, e il tripletto dei "pesantissimi" *bosoni intermedi* W^+ W^- e Z^0, che hanno la funzione di trasmettere le interazioni deboli. Queste particelle erano previste dalla teoria SU(2)×U(1) formulata da Glashow, Salam e Weinberg nella prima metà degli anni Sessanta, che combinava il gruppo SU(2) con il gruppo U(1) dell'elettromagnetismo, unificando con successo l'interazione elettromagnetica con l'interazione debole in un'unica interazione, la forza *elettrodebole*. La differenza tra le masse venne attribuita a una rottura spontanea della simmetria, avvenuta nel corso del processo di raffreddamento dell'universo primordiale. Alle altissime temperature iniziali le particelle erano essenzialmente identiche e le interazioni deboli ed elettromagnetiche erano manifestazioni di una singola forza. L'applicazione di queste idee comportava l'esistenza del cosiddetto *bosone di Higgs*, all'origine del meccanismo di rottura della simmetria e capace di fornire una massa alle altre particelle, in accordo con ciò che si osserva in natura. A questo punto tutto era pronto per un nuovo colpo di scena. Nel 1973 un primo esperimento rivelò l'esistenza delle cosiddette *correnti neutre*; erano la prova che le interazioni deboli vengono trasmesse anche da particelle neutre come la Z^0, come previsto dalla teoria elettrodebole SU(2)×U(1) che fu trionfalmente verificata nel 1983, quando un *team* guidato da Carlo Rubbia riuscì finalmente a creare i *bosoni intermedi* W^+, W^- e Z^0 facendo uso di un acceleratore di particelle sufficientemente potente.

La questione del *bosone di Higgs*, una particella tanto leggendaria da essere soprannominata "particella di Dio", è tuttora all'ordine del giorno. I fisici sperano di riuscire finalmente a dimostrarne l'esistenza con un nuovo acceleratore, il Large Hadron Collider (LHC) in fase avanzata di realizzazione al CERN di Ginevra, che opererà a un'energia di 7000 GeV per fascio (1 GeV= 1 GigaelettronVolt= 1 miliardo di miliardi di elettronvolt).

A questo punto la QCD (Cromodinamica Quantistica), una teoria delle *interazioni forti* tra quark e gluoni (mediatori dell'interazione forte) basata sul gruppo di simmetria SU(3), era ormai combinata insieme alla teoria elettrodebole SU(2)×U(1) in un'unica teoria, la teoria SU(3)×SU(2)×U(1), divenuta nota come *Modello standard*, in grado di descrivere essenzialmente tutti i fenomeni osservati in termini di interazioni fondamentali che avvengono attraverso lo scambio di quanti elementari dei portatori di forza: il fotone per l'interazione elettromagnetica, i gluoni per l'interazione forte e i W^+, W^- e Z^0 per le interazioni deboli. Tutta la materia osservata nell'universo risultava spiegabile in termini di un piccolo numero di particelle elementari interagenti attraverso leggi di grande semplicità, secondo quanto dettato dalle simmetrie del modello.

Questo sviluppo rappresentava uno dei trionfi della fisica moderna, ma dal punto di vista teorico lasciava aperte una serie di domande e presentava molti punti deboli, che suggerivano l'esistenza di simmetrie ancora più profonde. Ormai padroni del linguaggio di questa super-matematica, molti di loro hanno cominciato a costruire teorie, facendosi guidare dalla teoria dei gruppi. Ma il processo di astrazione, pur essendosi rivelato in grado di isolare in modo estremamente efficace ed elegante gli aspetti della natura che possono essere compresi in termini di sola simmetria, ha tagliato fuori molte caratteristiche essenziali e concrete del mondo reale e non offre molte speranze di spiegare i valori numerici delle vite medie delle particelle o la forza delle interazioni fondamentali. Molti indizi concreti mostrano oggi l'esistenza di una fisica che va oltre il *Modello standard* e che i fisici ritengono sia associata al non ancora scoperto *bosone di Higgs* e alle masse dei neutrini.

Alla ricerca di una più completa descrizione delle particelle fondamentali e delle loro interazioni i fisici teorici hanno continuato nel frattempo a costruire modelli utilizzando altri gruppi di simmetria, combinandoli anche tra loro. Oggi si parla di Teorie della Grande Unificazione (GUT), di Supersimmetria (SUSY), di *stringhe*, entità unidimensionali che sostituiscono le particelle come oggetti fondamentali. L'universo delle stringhe in spazi multidimensionali prospetta la possibilità di incorporare in un'unico quadro generale anche la gravità quantistica, una combinazione dei concetti quantistici con la teoria generale della relatività.

In ogni caso resta la domanda: queste teorie hanno conseguenze verificabili? Nessuno è riuscito, almeno fino ad ora, a trovare prove sperimentali a loro favore o contro di esse con gli strumenti osservativi attualmente disponibili: per il momento sono dunque da classificare come speculazioni molto astratte, la cui qualità è solo quella di fornire una base di comprensione coerente. Esse sono tuttavia la prova di quanto il rapporto dei fisici con la matematica sia profondamente mutato: dall'antica meraviglia di Galileo, Keplero e Newton per l'essenza matematica del "creato", al senso di onnipotenza del fisico teorico odierno, creatore egli stesso di nuovi universi fisici attraverso il potere creativo della matematica.

Dibattito in aula. Domus Galilaeana, Pisa 2003.