**Luisa Bonolis**
*AIF, gruppo di storia della fisica*

# Matematici e fisici a Göttingen. Amalie Emmy Noether e la nascita delle superleggi: simmetrie e invarianze

*In mathematics you don't understand things.*
*You just get used to them.*
Johann von Neumann

*The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning*
Eugene Paul Wigner (1960)

## Premessa

Senza la geometria di Bernard Riemann (1826-1866), inventata nel 1854, o senza la teoria dell'invarianza sviluppata dai matematici Arthur Cayley (1821-1895) e J.J. Sylvester (1814-1897), e da una schiera dei loro seguaci, la teoria generale della relatività di Einstein (1879-1955) non avrebbe potuto essere formulata. Senza l'intera teoria matematica dei problemi al contorno che ebbero origine dai lavori di J.C.F. Sturm (1803-1855) e J. Liouville (1809-1882), non sarebbe stato possibile sviluppare la meccanica ondulatoria nel 1925. La rivoluzione della fisica moderna inaugurata nel 1923 con i lavori di Max Born (1882-1970), Pascual Jordan (1902-1980), Werner Heisenberg (1901-1976) e P.A.M. Dirac (1902-1984) non avrebbe avuto inizio senza la necessaria matematica delle matrici inventata da Cayley nel 1858, ed elaborata successivamente da un piccolo numero di matematici. Il concetto di invarianza, di ciò che non cambia nel corso del continuo flusso dei fenomeni naturali, ha finito col permeare tutta la fisica moderna. Esso ebbe origine nel diciottesimo secolo nell'ambito del lavoro sulla teoria delle equazioni algebriche svolto intorno al 1770 da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), in cui compare, seppure implicitamente, il concetto di gruppo, che sessant'anni più tardi sarà pienamente sviluppato da Evariste Galois (1811-1832) poco prima della sua precoce morte in duello. Quasi cento anni dovranno trascorrere prima che i fisici si accorgano che le simmetrie del mondo microscopico si esprimono attraverso il linguaggio matematico della teoria dei gruppi.

Sono solo alcuni degli esempi che mostrano come dalla matematica pura possano scaturire fruttuose applicazioni alla fisica, senza che nessuno dei matematici coinvolti in queste ricerche potesse immaginarne le implicazioni future. È merito di Galilei l'aver con tanta efficacia espresso l'esistenza di questo legame profondo tra matematica e scienze della natura (*Il Saggiatore*, cap. V) su cui vale la pena di focalizzare ogni tanto l'attenzione: "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto". Questo passo di Galilei dovrebbe essere fissato nella memoria di tutti, così come da tutti sono conosciuti i versi iniziali della *Divina Commedia*. Dopo secoli di fruttuosa sinergia, non senza stupore Eugene Paul Wigner, come molti altri, ha riflettuto sull'"l'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali", ma anche sul fascino estetico di queste costruzioni formali in cui la realtà naturale si lascia inquadrare e non a caso ha aperto il suo famoso articolo (Wigner 1960) con una citazione da Bertrand Russell: "Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty – a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry". D'altra parte, David Hilbert (1862-1943), uno degli ultimi giganti della matematica del diciannovesimo secolo, osservò che la matematica non è altro che un gioco che si fa sulla carta, seguendo certe semplici regole e usando dei segni privi di significato. Riguardo la riflessione su questo misterioso legame tra fisica e matematica, esiste ormai una letteratura vastissima, ma continuerà sempre a stupirci, soprattutto se pensiamo a come sistemi assai diversi mostrano comportamenti simili, così che fenomeni diversi possono essere descritti dalle stesse equazioni. Aspetti sofisticati di questo rapporto tra ambiti della realtà apparentemente assai lontani sono ripetutamente emersi all'interno della stessa fisica nella seconda metà del ventesimo secolo, come per esempio quelli della "cross-fertilization" tra i linguaggi della fisica della materia condensata e la fisica delle particelle.

## Introduzione

Nel diciannovesimo secolo la matematica e la fisica si svilupparono prendendo corpo come argomenti di ricerca separati. La crescente richiesta di rigore, la rinascita del metodo assiomatico, l'emergere dell'astrazione, furono alcune delle caratteristiche generali del secolo che suscitarono la sensazione che soltanto la matematica pura potesse essere definita come "matematica" a tutti gli effetti, mentre tutto il resto, specialmente la matematica applicata, doveva avere una posizione rispettabile, ma subordinata. I fisici dal canto loro non erano molto interessati alla matematica: la ricerca fisica consisteva principalmente nel fare esperimenti, e in questo senso esisteva quindi un profondo divario tra matematica e fisica. Perfino il lavoro di Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) era considerato matematica. Le cose cambiarono un po' con James C. Maxwell (1831-1879) che, riflettendo sull'insegnamento della "filosofia naturale" – che all'epoca significava una formazione sia in matematica pura, sia nell'esperimento – affermò che ogni campo della fisica non era da considerare "merely as a collection of facts to be coordinated by means of the formulae laid up in store by the pure mathematicians, but as itself a new mathesis by which new ideas may be developed" (1873). Il famoso detto di Hertz "La teoria di Maxwell *è* il sistema di equazioni di Maxwell" ben esprime lo spirito della transizione alla fisica teorica moderna, così come si manifesta nella sintesi di Maxwell. Nonostante ciò, i fisici che lavorarono nella seconda metà del diciannovesimo secolo continuarono ad avere prevalentemente una mentalità empirica e restarono scarsamente interessati alle investigazioni formali, che invece costituivano lo scopo principale dei fisici matematici, a loro volta poco interessati alla fisica, che pure costituiva la radice della loro ispirazione.

Verso la fine del diciannovesimo secolo, la fisica teorica trovò un impegno del tutto nuovo nei confronti della matematica e i fisici teorici cominciarono a prendere le distanze dagli sperimentali. Nonostante ciò, il ruolo del fisico teorico come tale era ben lontano dall'essersi affermato. È ben noto che nel 1874, quando Max Planck (1858-1947) entrò all'Università di Monaco e discusse le prospettive della ricerca in fisica con Philipp von Jolly, gli fu detto che la fisica era essenzialmente una scienza completa, specialmente dopo la scoperta della conservazione dell'energia, con piccole prospettive di futuri sviluppi. Fortunatamente Planck decise di studiare fisica nonostante il futuro incerto che gli era stato presentato; più tardi ricordò che quando nel 1889 egli stesso fu nominato successore di Gustav R. Kirchhoff (1824-1887) all'Università di Berlino, era l'unico teorico in un mondo di fisici sperimentali, che per di più consideravano la fisica teorica una disciplina "superflua". Nel suo graduale emergere come disciplina autonoma, la fisica divenne un campo dotato di un settore sperimentale dominante accanto a un piccolo settore teorico. Soltanto nel 1915 Wilhelm Wien (1864-1928) fu in grado di parlare di una unione alla pari dei due rami che insieme formano l'attuale "potente fisica teorica".

Il calcolo era stato il linguaggio matematico della fisica nel corso del diciannovesimo secolo, dopo l'esplosione della matematica delle equazioni differenziali inaugurata da Newton e da Leibniz. Il trionfo di questo strumento matematico fu certamente una delle ragioni per cui alla fine del diciannovesimo secolo la fisica pensava di aver raggiunto la sua conclusione. Nulla sembrava dover essere ancora scoperto, tutto poteva essere calcolato, dagli eventi astronomici agli invisibili campi di Maxwell. La matematica era considerata sempre più un aspetto naturale della fisica, ma il calcolo non appariva più adeguato per descrivere domini come l'elettrodinamica e la termodinamica, così che i fisici avevano sviluppato forme di matematica come l'algebra vettoriale e la meccanica statistica per i loro scopi interni alla disciplina, nell'ambito dei problemi di loro interesse.

Muovendosi da aspetti metrici dello spazio, cioè dalla geometria, la matematica aveva appena inventato un gran numero di strumenti formali, che a prima vista apparivano ben lontani da una descrizione pratica della realtà: la geometria stava svelando il suo volto più astratto. Nel suo ultimo volume *Erkenntnis und Irrtum,* apparso nel 1905, Ernst Mach (1838-1916), nel ricostruire anche la storia della geometria fino alla scoperta delle geometrie non euclidee di Nikolaj I. Lobachevskij (1792-1856) e di János Bolyai (1802-1860) e della concezione fisica della geometria di Riemann, metteva in guardia contro i rischi di una ricerca condotta "senza alcuna idea di applicazione alla realtà" come quella di "immaginare per il nostro spazio un numero di dimensioni oltre *le tre dello spazio dato dai nostri sensi*, o di concepire la rappresentazione di questo spazio attraverso qualsiasi geometria che si allontani in modo sostanziale dalla euclidea". In quello stesso periodo il linguaggio matematico della fisica si allontanò definitivamente dal suo "guscio cartesiano" esplorando proprietà che generalizzavano i concetti diffusi in geometria come le trasformazioni di Lorentz della relatività speciale, insieme al potere e alle possibilità offerte dai vettori, e particolarmente dall'analisi tensoriale introdotta da Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1941), che preparava lo scenario per la relatività generale. Una nuova forma di interazione tra matematici e fisici si manifestò quando la matematica assunse sempre più il ruolo di fondamento strutturale per la descrizione della realtà fisica. Tale processo ebbe un ruolo fondamentale anche nel forgiare una nuova relazione tra i matematici e i fisici. Questo legame divenne particolarmente intenso quando entrambi condivisero un'area di interesse comune a livello intellettuale e culturale all'inizio del secolo ventesimo, allorché la rivoluzione concettuale di Einstein modificò profondamente la nostra visione dell'universo fisico.

## Göttingen, la mecca della matematica

La richiesta di Einstein che le leggi che governano la gravitazione debbano essere covarianti rispetto a qualsiasi trasformazione di coordinate suonava molto familiare a matematici come il tedesco Felix Klein (1849-1925), che circa trent'anni prima, quando aveva solo 23 anni, aveva affermato nel suo *Erlanger Programm* che ciò che è importante non sono le figure geometriche, ma i gruppi di trasformazioni sotto cui queste restano invariate. Secondo questo approccio unificato tutte le geometrie sono riconducibili allo studio dei movimenti e delle proprietà di uno spazio che risultano invarianti sotto un particolare gruppo di trasformazioni, così che tali gruppi possono essere utilizzati a loro volta per classificare le diverse geometrie. In questa nuova visione unificata la geometria euclidea e le non euclidee acquistano uno status comune: qualsiasi geometria consiste in uno spazio costituito da punti e da un gruppo di trasformazioni che spostano le figure di tale spazio conservandone le relative proprietà. In questo senso la geometria euclidea diventa la geometria caratterizzata dal gruppo delle traslazioni e delle rotazioni nel piano.

Per questo motivo Klein sentiva che esisteva "un solo passo" tra le idee alla base della teoria speciale e generale della relatività e il suo *Programma di Erlangen*, sottolineando come la teoria speciale potesse essere considerata come la teoria dell'invarianza del gruppo delle trasformazioni di Lorentz (1919).

Nel 1870 Klein aveva concepito un profondo interesse per la teoria dei gruppi e il concetto di simmetria insieme al norvegese Sophus Lie (1842-1899), durante un soggiorno a Parigi nel 1870, soggiorno che segnò profondamente il destino delle loro successive ricerche. Nel cercare una generalizzazione alla teoria dei gruppi, sviluppata da Evariste Galois (1811-1832) nell'ambito della sua pionieristica ricerca sulle soluzioni delle equazioni algebriche, Lie studiò i sistemi di equazioni alle derivate parziali e come le loro soluzioni fossero invarianti sotto alcuni tipi di gruppi continui di trasformazione. La sua consapevolezza dell'importanza di questi aspetti per la fisica gli fece affermare che "I principi della meccanica hanno una origine gruppale … l'applicazione all'ottica e alla fisica matematica delle mie idee apparirà certamente fruttuosa". La teoria dei gruppi si suddivide nello studio dei gruppi finiti, che descrivono particolari trasformazioni discrete, come le rotazioni, e in quello dei gruppi che descrivono le trasformazioni continue. Lie dedicò l'intera vita alla teoria dei gruppi continui; creò l'algebra e i gruppi che hanno il suo nome, per studiare la simmetria delle equazioni differenziali e delle equazioni alle derivate parziali, un lavoro di evidente utilizzazione in fisica, ma che non troverà applicazioni nel XIX secolo. A quell'epoca non esisteva alcuna connessione evidente con un qualsiasi problema fisico; ancora nel 1900, conversando con un collega a proposito delle aree della matematica che per un fisico era più utile conoscere, James Jeans affermava con convinzione: "possiamo scartare anche la teoria dei gruppi, che non sarà mai di alcuna utilità in fisica". La teoria di Lie eserciterà invece una influenza enorme sugli studi novecenteschi e rivelerà tutta la sua efficacia con l'applicazione di questi metodi alla meccanica quantistica divenendo poi uno strumento basilare per la fisica moderna.

Essendo stato assistente di Julius Plücker (1801-1868), Klein era stato profondamente influenzato da quella che gli era apparsa "una intima connessione" tra le differenti linee di sviluppo della geometria e la meccanica. Nel 1875 occupò una cattedra alla *Technische Hochschule* di Monaco dove ebbe tra i suoi allievi anche Max Planck, Luigi Bianchi (1865-1928), Gregorio Ricci-Curbastro e Arnold Sommerfeld (1868-1951), che fu poi suo assistente per molti anni. Nel 1886 Klein si spostò all'Università di Göttingen, la cui grande tradizione scientifica le aveva conferito una solida posizione nel campo della matematica, principalmente come risultato dei contributi di Carl Friedrich Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Bernhard Riemann. All'inizio del secolo Göttingen era ormai considerata la "Mecca della matematica", e Klein, sempre nel suo stile da "dio lontano" che dirigeva tutto dall'alto delle nuvole, dedicava molto del suo tempo e delle sue energie alla realizzazione del suo sogno di rendere Göttingen il centro del mondo scientifico, in particolare per la ricerca nel campo della matematica. Introdusse gli incontri settimanali per discutere le recenti ricerche e istituì una stanza di lettura con annessa biblioteca di matematica dove gli studenti potevano accedere liberamente ai libri messi a loro disposizione in scaffali aperti. Già alla fine dell'Ottocento aveva creato una Società per lo sviluppo della matematica applicata e della meccanica e parallelamente aveva gradualmente organizzato l'Università in una serie di istituti scientifici e tecnici che sarebbero stati il futuro modello per i complessi scientifico-tecnologici che in seguito si sarebbero sviluppati intorno a varie università americane. Effettivamente Göttingen divenne il modello per i migliori centri di ricerca per la fisica e la matematica a livello mondiale, come l'*Institute for Advan-*

*ced Study* di Princeton e il francese *Institute des Hautes Études Scientifiques* a Bures-sur-Yvette, vicino Parigi. Un'altra notevole iniziativa di Klein fu quella di organizzare dei corsi per gli insegnanti di scuola superiore.

La figura leggendaria di Klein attirava a Göttingen studenti da tutto il mondo, particolarmente dagli Stati Uniti. Nel 1895 Klein riuscì nel suo scopo di avere David Hilbert sulla cattedra di matematica, dove quest'ultimo continuò ad insegnare fino alla fine della sua carriera. Hilbert si era laureato nel 1885 con una tesi che riguardava la teoria degli invarianti algebrici, un argomento che allora era considerato all'avanguardia e che rimase il suo argomento di ricerca favorito per diversi anni. A quel tempo ci si poneva il problema di scoprire se esistesse una base, cioè un insieme finito di invarianti, nei cui termini potessero esprimersi, attraverso una funzione polinomiale, integralmente e senza eccezioni, tutti gli altri infiniti invarianti. Vent'anni prima Gordan aveva ottenuto un risultato chiave nella teoria che tuttavia era relativo a un solo insieme semplificato di forme algebriche. Gli sforzi successivi di matematici tedeschi, inglesi, francesi e italiani non erano riusciti in un ventennio a venir a capo della forma più generale del teorema, nota appunto come "problema di Gordan" che era tra i più aperti e tra i più dibattuti nei circoli matematici dell'epoca. Nel 1888 Hilbert aveva risolto il problema "tagliando il nodo gordiano": invece di fornire la prova costruendo la soluzione del problema, o dimostrando come si poteva costruire, non aveva fatto altro che provare che tale soluzione doveva esistere sempre, per necessità logica, perché l'ipotesi contraria avrebbe portato ad una contraddizione. Mettendo da parte il pesante "formalismo" di Gordan, aveva aggirato la difficoltà con una pura dimostrazione di esistenza. A tutti coloro che continuavano a dichiarare che le assunzioni di esistenza non hanno significato se non nel caso in cui siano effettivamente in grado di specificare l'oggetto di cui si afferma l'esistenza, Hilbert rispondeva invariabilmente: "Il valore delle pure dimostrazioni di esistenza consiste proprio nel fatto che rendono superflua la costruzione dei singoli enti e che costruzioni estremamente differenti possono essere sintetizzate in un'unica idea fondamentale in modo che soltanto ciò che è essenziale alla dimostrazione risulti chiaramente in evidenza; brevità ed economia di pensiero sono la ragion d'essere delle dimostrazioni di esistenza". Soltanto Klein sembrò riconoscere immediatamente la potenza di questo lavoro: "assolutamente semplice e quindi ammirevole da un punto di vista logico", e arrivò a indicare in Hilbert colui che aveva portato la teoria degli invarianti "a uno stadio di consapevolezza critica". Fu allora che Klein decise che avrebbe fatto chiamare Hilbert a Göttingen alla prima occasione. Nel corso del II Congresso internazionale di matematica tenuto a Parigi nel 1900 Hilbert presentò una relazione dal titolo *Mathematische Probleme*: "Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si cela l'avvenire, per gettare uno sguardo sui progressi della nostra scienza e sui segreti del suo ulteriore sviluppo nei secoli futuri?" si chiedeva Hilbert. Il congresso, a cavallo di due secoli, gli offriva l'occasione per tracciare un bilancio dello sviluppo raggiunto dalla matematica e per analizzare i numerosi problemi ancora aperti. I famosi 23 problemi di Hilbert da allora hanno costituito alcuni dei principali obiettivi degli sforzi successivi, stimolando la scoperta di nuovi metodi e spesso di nuove teorie di grande generalità e rappresentando la "traccia" per grandissima parte della ricerca del XX secolo.

Il forte interesse di Hilbert nei confronti della fisica matematica contribuì alla notevole reputazione dell'università di Göttingen nel campo delle scienze fisiche. L'unità organica di matematica e fisica era d'altra parte un risultato che la moderna Scuola di Göttingen aveva ereditato da Friedrich Gauss e da Wilhelm Weber, e Hilbert fu sempre ben lontano dal disattendere le speranze di Klein in una rinascita della tradizione. Dopo il 1900 Hilbert decise di mettersi a studiare fisica e si occupò attivamente di fisica classica prima, e poi di teorie relativistiche e di meccanica quantistica. Hilbert coltivava questi interessi in stretto contatto con Hermann Minkowski, un altro degli astri di Göttingen. Questo rapporto molto profondo, grazie al quale ebbero sempre una forte influenza reciproca nel rispettivo lavoro scientifico, era maturato nel corso degli studi universitari. La mente brillante e la precocità del timido Hermann, parecchio più giovane di tutti i suoi compagni, avevano affascinato il giovane David. Appena diciottenne Minkowski aveva vinto il *Grand Prix des Mathématiques* dell'*Académie des Sciences* di Parigi con una memoria sulla rappresentabilità di ogni numero come somma di cinque quadrati. L'entusiastico amore per la matematica aveva unito Hilbert e Minkowski, in un'amicizia durata fino alla morte precoce di quest'ultimo, avvenuta all'inizio del 1909.

Minkowski si dedicò fino all'ultimo istante alle applicazioni della matematica alla fisica. Nel 1905 Hilbert e Minkowski avevano deciso di dedicare il seminario che tenevano in comune a un soggetto nel campo della fisica – l'elettrodinamica dei corpi in movimento. Come ricorda Max Born, che all'epoca era assistente di Hilbert, le ore dei seminari erano eccitanti e stimolanti. La contrazione di Fitzgerald, il tempo locale di Lorentz, l'esperimento di Michelson e Morley, tutto veniva discusso ampiamente ed essi "ascoltavano delle affermazioni del tutto incredibili a proposito dell'elettrodinamica". Nello stesso anno, idee analoghe vennero esposte in due memorie sull'elettrodinamica e sulla relatività speciale da un impiegato dell'ufficio brevetti di Berna… "Ma di tutto ciò," ricorda Born "nulla era ancora noto a Göttingen e il nome di Einstein non venne menzionato durante i seminari". Quando il lavoro dell'impiegato di Berna divenne noto a Göttingen Minkowski si ricordò del suo allievo: "Ah, Einstein, quello che saltava sempre le lezioni – non lo avrei mai creduto capace di questo!" Nel frattempo Minkowski era nel pieno della sua creatività. Nel 1907 si era reso conto che il lavoro di Lorentz e di Einstein poteva essere compreso meglio in uno spazio non-euclideo. Egli considerò spazio e tempo, che precedentemente venivano considerati indipendenti, accoppiati in un *continuum* a quattro dimensioni, introducendo il concetto di cronotopo, che costituì la struttura base per tutti i successivi lavori sulla relatività. Per mezzo dell'artificio matematico di introdurre una quarta coordinata immaginaria per il tempo ($x_4 = ict$) insieme alle tre coordinate spaziali, Minkowski ottenne che le trasformazioni di Lorentz risultassero identiche alla trasformazione ortogonale del sistema quadridimensionale, il cosiddetto spazio di Minkowski. Durante l'incontro annuale della Società degli scienziati e dei medici tedeschi presentò una relazione dal titolo *Spazio e Tempo*. "L'immagine dello spazio e del tempo che intendo sottoporvi" iniziò Minkowski con la sua voce pacata ed esitante "scaturisce dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò consiste la loro forza. Sono profondamente connaturati. Da ora in poi lo spazio e il tempo come nozioni separate sono destinati a svanire in pure ombre e solo una sorta di unione dei due conserverà una realtà indipendente". Nella sua teoria della relatività ristretta Einstein aveva mostrato che quando gli eventi meccanici sono descritti con l'uso di orologi e regoli per misurare le distanze, la descrizione dipende dal moto del laboratorio nel quale gli strumenti vengono utilizzati, e aveva formulato le relazioni matematiche che connettono differenti descrizioni dello stesso evento fisico. Minkowski introdusse nella teoria della relatività la sua semplice idea matematica dello spazio-tempo per mezzo del quale le differenti descrizioni di un fenomeno possono essere rappresentate matematicamente in un modo molto semplice. È ciò che è stato denominato "il grande momento della geometrizzazione": "La geometria tridimensionale diventa un capitolo della fisica quadridimensionale". "Ora capite perché", egli disse ai suoi ascoltatori, "ho esordito dicendo che spazio e tempo diventeranno dei fantasmi, e soltanto un mondo in sé e per sé sopravviverà". Tali idee furono apprezzate solo successivamente da Einstein, che più tardi le utilizzerà nella formulazione della teoria generale della relatività.

Minkowski e Hilbert erano soprannominati "Castore e Polluce". A differenza di Klein – un uomo piuttosto bello, con barba e capelli nerissimi, alto e distaccato nella sua tipica aria regale – Hilbert era di media statura, vivace, con una barba rossiccia e dall'abbigliamento non pretenzioso; non aveva affatto l'aria del professore. Fin dall'inizio Hilbert aveva deciso che, attraverso la scelta dei soggetti, avrebbe educato se stesso esattamente come i suoi allievi e che quindi non avrebbe mai ripetuto sempre le stesse lezioni. Attraverso Sommerfeld chiamava presso di sé degli assistenti, che avevano il compito di ampliare la sua cultura nel campo delle scienze fisiche.

All'inizio del XX secolo gli studenti di matematica di tutto il mondo ricevevano lo stesso consiglio: "Fai la valigia e vai a Göttingen". A Hermann Weyl (1885-1955), arrivato a Göttingen nel 1903, Hilbert apparve come il "Pifferaio Magico" della fiaba, che con l'irresistibile richiamo del suo "dolce flauto" lo attirava "nel profondo fiume della matematica". In quello stesso semestre 1903-1904, una giovane donna stava frequentando come uditrice le lezioni di Hilbert, Klein e Minkowski. Amalia Emmy Noether era nata a Erlangen, una piccola città del Sud della Germania, il 23 marzo 1882. In questo importante centro universitario, una delle tre università "libere" del Paese (non fondate dalla Chiesa) insegnava suo padre Max, un uomo di grande intelligenza, pieno di calore umano e di interessi e uno dei maggiori rappresentanti della scuola algebrico-geometrica. La madre di Emmy, Ida Kaufmann, apparteneva a una ricchissima famiglia ebrea. A quell'epoca non esistevano scuole superiori dove le ragazze potessero prepararsi a sostenere l'esame di maturità, che apriva la possibilità di frequentare l'università; in Germania e in Austria l'educazione formale delle donne finiva all'età di 14 anni e la loro iscrizione regolare all'università era del tutto fuori questione. Nel 1898 il Senato accademico dell'università di Erlangen, dove il padre di Emmy era professore, dichiarò che l'ammissione di studenti di sesso femminile avrebbe "sovvertito l'ordine accademico". Ma la discussione su questi temi era molto infiammata e nel 1900, quando Emmy aveva diciotto anni, l'università di Erlangen consentì finalmente alle donne di assistere alle lezioni, il permesso rimaneva tuttavia subordinato al parere del titolare; anche la possibilità di sostenere un colloquio finale per ottenere un certificato universitario dipendeva completamente dalle simpatie dell'esaminatore. Fino alla prima guerra mondiale esistevano ancora in Germania professori che si rifiutavano di fare lezione se erano presenti donne in aula! Eppure nel 1908 il ministro prussiano dell'educazione si trovò nella necessità di ribadire che l'accesso delle donne alle lezioni "non doveva essere subordinato al personale grado di disapprovazione dell'insegnante riguardo l'educazione mista"! Nell'aprile del 1900 Emmy sostenne brillantemente l'esame di stato per l'insegnamento del francese e dell'inglese. Ma non divenne mai un'insegnante di lingue. Nell'autunno dello stesso anno, insieme ad un'altra ragazza, era la sola donna presente fra i circa mille studenti della popolazione universitaria di Erlangen. Dal 1900 al 1903 frequentò come uditrice le lezioni di matematica, romanistica e storia e nel frattempo si preparava per l'esame di maturità. Nel 1900 l'Università di Erlangen registrava solo due donne su 986 studenti. Nel luglio del 1903 Emmy sostenne come privatista l'esame di maturità; si spostò a Göttingen per l'anno accademico 1903-1904, dove seguì anche le mitiche lezioni del "divino Felix", di sicuro ben lontana dall'immaginare che dieci anni dopo lei stessa avrebbe in qualche modo fatto parte di quell'Olimpo. Quello stesso anno nelle università bavaresi venne concessa la possibilità di iscrizione alle donne che avevano sostenuto la licenza. Nell'autunno del 1904 Emmy si iscrisse regolarmente all'università di Erlangen, Facoltà di filosofia, frequentando esclusivamente i corsi di matematica. Era l'unica donna insieme a 46 uomini.[1]

Nel 1907 si laurea "summa cum laude"; suo relatore di tesi è Paul Gordan, "il re della teoria degli invarianti", collega e grande amico di suo padre. Rapidamente Emmy Noether inizia a lavorare, senza alcun contratto né compenso, presso l'Istituto di Matematica di Erlangen, collaborando con suo padre e con i due successori di Gordan. Uno di loro in particolare, Ernst Fischer, ebbe un'influenza notevole sul suo lavoro nel campo dell'algebra. Fischer diventò uno dei suoi più importanti interlocutori, con lui poteva "parlare di matematica" a suo piacimento. Sotto la sua guida Emmy Noether passò dallo stile algoritmico alla Gordan all'approccio assiomatico e astratto di Hilbert. La Noether della maturità sarà chiamata la "madre" della moderna algebra astratta e costituirà un estremo e grandioso esempio di pensiero concettuale assiomatico in matematica: è difficile immaginare un contrasto maggiore rispetto al più puro stile formale che aveva caratterizzato la sua tesi, un lavoro che lei stessa liquiderà definendolo una "giungla di formule", una pura "faccenda di conti". La sua reputazione cresce insieme alle sue pubblicazioni: nel 1908 viene eletta membro del Circolo Matematico di Palermo, l'anno successivo viene invitata a far parte della *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. È la prima donna a partecipare alla riunione annuale della Società. Emmy ama molto questi incontri annuali che soddisfano il suo naturale desiderio di "parlare di matematica" come lei stessa diceva sempre. I primi anni era praticamente l'unica donna attiva presente, a parte le mogli dei partecipanti.

## Einstein a Göttingen

Negli anni fra il 1913 e il 1914 la Noether intensificò i suoi contatti con Felix Klein e David Hilbert i quali all'epoca si stavano interessando della teoria della relatività generale di Einstein. Hilbert era ormai il personaggio di punta della vita scientifica di Göttingen e dopo la morte di Henri Poincaré era ormai considerato il più grande matematico dell'epoca.

A differenza della relatività speciale, che rappresentava la sintesi e la conclusione delle scoperte di una generazione di scienziati, la relatività generale è stata una creazione individuale, solitaria, una geniale intuizione, poggiata però su solide basi matematiche. Nella teoria speciale le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico erano state derivate come conseguenza dell'invarianza relativistica. Come ha sottolineato Wigner, si trattava di inversione di tendenza rispetto al passato, una lezione importante che gradualmente sarebbe entrata a far parte del DNA dei fisici: "… fino ad allora i principi di invarianza erano stati derivati dalle leggi del moto … Ora per noi è naturale derivare le leggi di natura e verificare la loro validità per mezzo dei principi di invarianza, piuttosto che derivare le leggi di invarianza da quelle che noi pensiamo essere le leggi di natura". Questo profondo cambiamento di atteggiamento era divenuto più radicale nella ricerca di Einstein di una teoria generale della relatività. Il principio di covarianza generale, ovvero l'invarianza in forma delle leggi di natura sotto trasformazioni arbitrarie, deve dettare la dinamica della gravità, dello spazio-tempo stesso. A quell'epoca Einstein, che inizialmente aveva considerato la trascrizione di Minkowski della sua teoria speciale in una forma tensoriale "una erudizione superflua", ora si era completamente arreso alla necessità di padroneggiare quella che la maggior parte dei matematici considerava una branca esoterica della loro disciplina, un "puro gioco formale": il calcolo differenziale assoluto. Nelle mani di Einstein il calcolo tensoriale sviluppato da Ricci-Curbastro e Levi-Civita rappresentò il fondamento matematico per affrontare i formidabili problemi posti dalla formulazione della teoria, la cui elaborazione fu particolarmente impegnativa e si protrasse per circa sette anni. Nel 1912 Einstein scriveva a Arnold Sommerfeld: "Una cosa è certa, in tutta la mia vita non ho mai lavorato tanto duramente, e l'animo mi si è riempito di un sacro rispetto per la matematica, la parte più sottile della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un inutile orpello. Di fronte a tale problema, l'originaria teoria della relatività è un gioco da ragazzi".

Certamente Einstein, più di ogni altro, comprese le conseguenze della simmetria delle leggi fisiche – e il loro collegamento con la struttura matematica dello spazio-tempo – mettendone in luce le profonde e rivoluzionarie implicazioni: "Le leggi della fisica devono essere di natura tale da valere in sistemi di riferimento in moto arbitrario" e non già solo in quelli in moto uniforme, come richiedeva la relatività speciale. Già nel 1910 Klein aveva osservato che relatività significa invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni e implica perciò una particolare simmetria delle equazioni della teoria, a sua volta un riflesso della geometria dello spazio-tempo postulata per l'insieme degli eventi fisici. Era quindi naturale che la sua attenzione fosse attratta dai lavori di Emmy Noether, che a quell'epoca aveva al suo attivo numerose pubblicazioni sulla teoria degli invarianti ed era ormai considerata un'autorità sull'argomento. Hilbert e Klein, immersi fino al collo nella teoria della gravitazione, la invitarono a Göttingen nell'aprile del 1915.

Dal 29 giugno al 7 luglio del 1915 Einstein venne invitato a tenere sei conferenze a Göttingen sullo stato delle sue ricerche su gravitazione e relatività e così scrisse a Sommerfeld al suo ritorno a Berlino: “Con mia grande gioia sono riuscito a convincere completamente Hilbert e Klein … Berlino non ha nulla a che fare con Göttingen quanto a vivacità degli interessi accademici”. “Sono entusiasta di Hilbert: un personaggio autorevole”. A quest’epoca Einstein non aveva ancora del tutto completato la teoria, che presentava alcuni problemi. I progressi più importanti risalgono al periodo tra l’ottobre e il novembre di quell’anno. In effetti non tutti i fisici avevano reagito entusiasticamente alla lotta di Einstein. Planck per esempio lo aveva esplicitamente scoraggiato, così che dopo aver dimostrato l’accordo della teoria con il moto del perielio di Mercurio, Einstein scrisse a Besso il 21 dicembre del 1915: “Leggi i giornali! … Perfino Planck ora comincia a prendere la cosa seriamente, anche se ha ancora qualche resistenza”.[2]

Nel frattempo, dopo la visita di Einstein, Hilbert aveva iniziato a lavorare intensamente sulla relatività generale, mirando fin dall’inizio ai fondamenti assiomatici della fisica e a una formula generale che unificasse la gravitazione con l’elettromagnetismo, basandosi sulla sua padronanza del formalismo matematico. In novembre Emmy Noether scriveva a Ernst Fischer: “Qui la teoria degli invarianti è molto popolare … La prossima settimana Hilbert parlerà dei suoi invarianti differenziali di Einstein e così tutti dovranno cercare di capirci qualcosa”.

Il passo finale verso il completamento della teoria generale della relatività fu fatto quasi contemporaneamente da Einstein e da Hilbert. Tra il 7 e il 20 novembre i due hanno un fitto scambio di lettere – da cui traspare una notevole cordialità – nel quale comunicano l’uno all’altro gli ultimi risultati. Hilbert a Einstein: “Il tuo sistema [di equazioni] si accorda, per quanto mi è dato di vedere, esattamente con ciò che ho trovato nelle ultime settimane e ho esposto all’Accademia”.

Il 25 novembre Einstein presentava all’Accademia prussiana la versione definitiva delle equazioni del campo gravitazionale che rappresentavano il completamento della struttura logica della teoria “… la scoperta più preziosa della mia vita”, come scrisse a Sommerfeld il 9 dicembre successivo. Il 20 novembre Hilbert aveva sottoposto a sua volta all’Accademia delle scienze di Göttingen una nota – “Grundlagen der Physik” (Fondamenti della fisica) – nella quale derivava le equazioni definitive del campo gravitazionale come soluzione di un problema variazionale. È difficile stabilire quanto ciascuno avesse appreso dall’altro, tuttavia Hilbert ammise pubblicamente che la grande idea di base era di Einstein. Alla fine del suo lavoro Hilbert magnificava il “metodo assiomatico”, del quale era il re, che aveva utilizzato impiegando “i più potenti strumenti dell’analisi, ovvero il calcolo delle variazioni e la teoria degli invarianti”.[3] Fin dall’inizio la concezione di Hilbert si era focalizzata sulla geometria come scienza della natura; in questo senso l’avvento della relatività generale appariva come la più straordinaria dimostrazione della sua antica visione di una armonia prestabilita tra matematica e realtà. Da quel momento Hilbert divenne sempre più entusiasta sul significato della covarianza generale e considerò la teoria di Einstein come “il più alto risultato del pensiero umano”.

“Le speranze nel circolo di Hilbert erano al culmine; il sogno di una legge universale che fosse in grado di rendere conto sia della struttura generale del cosmo, sia di quella di tutti i nuclei atomici, sembrava vicino alla sua realizzazione”, scrisse Hermann Weyl, che faceva anche lui parte di quel circolo. La sua visione, nel solco della tradizione iniziata da Minkowski, si basava sull’idea che i ruoli dei fisici e dei geometri potessero confluire in una comune esplorazione di una scienza unificata.

Einstein dal canto suo era un po’ irritato da questa invasione di campo dei matematici, e criticava Hilbert in una cartolina ad Ehrenfest del 25 maggio 1916: “Non mi piace la formulazione di Hilbert. È inutilmente specializzata e, per quanto riguarda la ‘materia’, inutilmente complicata … ha le pretese di un superuomo camuffate dietro la tecnica”. Il 15 dicembre Einstein scrisse a Klein: “Mi sembra che lei sopravvaluti il valore del punto di vista formale. Questo può avere un valore quando una verità *già scoperta* richiede di essere formulata in forma finale, ma dal punto di vista euristico fallisce sempre”. La sua impressione era che Hilbert, Klein e i loro seguaci volessero dimostrare ai fisici “quanto fossero più brillanti di loro". La fede di Hilbert nel metodo assiomatico veniva giudicata da Einstein "infantile, come quella di un bambino che è inconsapevole dei trabocchetti del mondo reale", come scrisse a Hermann Weyl nel novembre del 1916. Lo stesso Weyl pensava che il lavoro di Hilbert nel campo della fisica avesse un valore limitato se confrontato con il suo lavoro nella matematica pura e in un ricordo di Hilbert sottolineò successivamente che "uomini come Einstein e Niels Bohr trovano nel buio la propria via verso le loro concezioni della relatività generale o della struttura atomica, attraverso una esperienza e una forma di immaginazione diverse da quelle dei matematici, sebbene la matematica sia senza dubbio un ingrediente essenziale". John von Neumann, un altro grande matematico, anche lui fortemente impegnato sul fronte della fisica, osservò a sua volta a proposito del lavoro di Einstein e delle sue ricadute sulla matematica: "La scoperta della relatività generale ci ha obbligato a revisionare la nostra visione sulle relazioni della geometria, in un assetto totalmente nuovo".

Nonostante le loro visioni differenti, Hilbert e Einstein certamente provavano una qualche ammirazione reciproca, tanto che Hilbert propose Einstein per il prestigioso premio Bolyai del 1915 "per l'alto spirito matematico che permea tutti i suoi risultati".

Nel frattempo, Hermann Weyl, che aveva fatto il suo dottorato con Hilbert nel 1908, fu catturato dal fascino dei lavori di Einstein. Nel 1918 pubblicò *Gravitation und Elektrizität*, il primo tentativo di una generalizzazione matematica della teoria di Einstein. Nel riprendere l'ipotesi accennata da quest'ultimo nel 1916 di combinare gravitazione ed elettromagnetismo, Weyl costruì quella che chiamò una pura geometria metrica infinitesimale; il suo tentativo fu importante soprattutto perché portò alla ribalta il concetto di *invarianza di gauge*, che esprime l'invarianza della lagrangiana del sistema[4] sotto alcuni particolari gruppi di trasformazioni *locali* e non solo globali.[5] Anche la teoria di Maxwell è dotata di una simmetria di gauge, che tuttavia non era stata messa inizialmente in evidenza come tale. Questo formalismo, che si sarebbe rivelato uno dei più proficui nella successiva pratica della costruzione di teorie, è alla base del Modello Standard, la descrizione in un unico quadro teorico delle tre forze fondamentali della natura: elettromagnetismo, interazione nucleare debole e interazione nucleare forte.

I principi di simmetria furono costantemente alla base dell'opera di Weyl nell'ambito delle teorie fisiche, che include la pionieristica applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica tra la fine degli anni Venti e l'inizio degli anni Trenta. Nel 1952 dichiarò: "Per quanto ne so, tutte le affermazioni *a priori* in fisica hanno la loro origine nella simmetria".

## Simmetria delle leggi: Emmy Noether

Dopo che le porte della "mecca" si furono aperte di fronte a Emmy Noether, Hilbert e Klein, ben determinati a farla restare, posero il problema della sua collocazione accademica e già il 20 luglio del 1915 la spinsero a fare richiesta per l'abilitazione. L'università di Göttingen era stata la prima università tedesca a fornire il titolo di dottore a una donna, ma concedere l'abilitazione era tutt'altra faccenda. Nell'intera Germania nessuna donna aveva ancora ottenuto l'abilitazione all'insegnamento. L'intera Facoltà di Filosofia, che comprendeva filosofi, filologi e storici insieme ai matematici e agli studiosi di scienze naturali, doveva votare l'accettazione della tesi di abilitazione. Naturalmente l'opposizione veniva in particolare dai membri non matematici della facoltà. "Come si può consentire che una donna diventi *Privatdozent*? Se diventa *Privatdozent* può diventare professore e membro del Senato accademico. Si può permettere che una donna entri a far parte del Senato?" Queste erano le ragioni formali. Ma preoccupazioni ben più inquietanti agitavano le menti: "Cosa penseranno i nostri soldati quando torneranno all'università e scopriranno che si chiede loro di studiare sotto la guida di una donna?" Hilbert, che non aveva peli sulla lingua ed era sempre molto diretto nelle sue argomentazioni, sembra rispondesse così agli argomenti formali: "Cari signori, non vedo perché il sesso della candidata debba costituire un argomento contro la sua ammissione come *Privatdozent*. In fin dei conti il Senato accademico non è uno stabilimento termale".

Nonostante gli sforzi – a cui partecipò, tra l'altro, lo stesso Einstein – Hilbert e Klein non riuscirono nell'intento. In seguito alle violente controversie sorte all'interno del Senato accademico Hilbert risolse il problema a modo suo. Le lezioni di fisica matematica – teoria degli invarianti – annunciate con il nome del professor Hilbert, venivano tenute da Fräulein Noether. Nel corso del semestre invernale 1916-17 la Noether tenne lezioni sulla teoria degli invarianti e continuò a lavorare su questi argomenti per i quali lo stesso Klein dimostrava un fortissimo interesse che scaturiva dall'individuare una correlazione fra le idee alla base della teoria speciale e generale della relatività e il suo "Programma di Erlangen", vero e proprio "manifesto" sull'importanza dei gruppi di trasformazioni e dei loro invarianti per la geometria. Secondo Klein, la teoria di Einstein sulla gravitazione giustificava in modo sorprendente la sua grande ammirazione per Riemann, che nell'ultimo paragrafo della sua famosa lezione inaugurale del 1854, "Sulle ipotesi che costituiscono i fondamenti della Geometria" aveva scritto: "… Ciò ci conduce nel dominio di un'altra scienza, nel dominio della Fisica …".

Anche la connessione fra le leggi di conservazione della meccanica classica (energia, impulso, momento angolare e moto uniforme del centro di massa) e le corrispondenti simmetrie dello spazio-tempo (traslazioni nello spazio e nel tempo, rotazioni e trasformazioni di Galileo e di Lorentz) erano da diversi anni al centro degli interessi di Klein, come si deduce dal testo delle conferenze da lui tenute negli anni 1915-1917 sugli sviluppi della matematica nel XIX secolo. Le leggi di conservazione sono tra le più fondamentali della fisica, tanto da essere qualificate come "principi". Tra i principi di conservazione della meccanica classica il più fondamentale è senza dubbio quello che riguarda l'energia. La legge di conservazione dell'energia in meccanica afferma che l'energia totale di un sistema isolato è costante. Il secondo grande principio è quello che riguarda la quantità di moto – o impulso – dei corpi; il terzo è il momento angolare. Tutti e tre hanno un equivalente nella teoria della relatività e in meccanica quantistica. La storia della derivazione delle leggi di conservazione della meccanica classica a partire dall'invarianza formale delle leggi della fisica risaliva già a Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), William Rowan Hamilton (1805-1865) e Carl Gustav Jacob Jacobi (1805-1851). Nel 1890 Henri Poincaré (1854-1912) mise in evidenza, senza dimostrarla esplicitamente, la connessione fra invarianza delle equazioni del moto sotto traslazioni spaziali, traslazioni temporali, rotazioni e trasformazioni di Galilei e conservazione dell'energia, dell'impulso, del momento angolare e del moto uniforme del centro di massa. Nel 1911 Klein basandosi su un lavoro di Gustav Herglotz, si rese conto che la connessione fra le proprietà di simmetria di un sistema e le sue leggi di conservazione erano correlate al lavoro di Lie sulla teoria dei gruppi applicata alle equazioni differenziali. Così chiese a Friedrich Engel, suo ex studente e collaboratore di Lie per molti anni, di derivare le dieci leggi di conservazione della meccanica classica in un caso particolare e nell'ambito della teoria di Lie. Pur non essendosi occupato delle applicazioni alla fisica, Lie aveva già affermato esplicitamente: "I principi della meccanica hanno un'origine gruppale", origine che fu dimostrata da G. Hamel nel 1904. Continuando questa linea di pensiero, Engel mostrò nel 1916 la connessione fra il gruppo di invarianza della meccanica classica e le leggi di conservazione della quantità di moto, del momento angolare e della velocità del baricentro. Queste ricerche estendevano alla meccanica galileiana e relativistica il punto di vista che Klein aveva già applicato con tanto successo alla geometria.

Nel frattempo Hilbert continuava a occuparsi di relatività generale e in particolare dell'apparente venir meno delle leggi di conservazione dell'energia-impulso. Questo restava il punto debole della teoria. Hilbert lo aveva citato in un lavoro come "il venir meno del teorema dell'energia". In una lettera a Klein affermava che questa appariva essere una caratteristica distintiva della teoria generale. Hilbert affermava anche di aver chiesto a

Emmy Noether di aiutarlo a chiarire la faccenda. Nel 1916 anche Klein stava lavorando a questo problema della conservazione dell'energia – che lui definiva "vettore dell'energia di Hilbert" – e a questo proposito scriveva a Hilbert: "Lei sa che la signorina Noether continua a consigliarmi nel mio lavoro ed è certo grazie a lei che sono diventato competente nell'argomento. Parlando di recente con Fräulein Noether dei risultati ottenuti con il suo vettore dell'energia, mi ha detto di aver derivato la stessa cosa a partire dalla sua nota di un anno fa [*Grundlagen der Physik*] e di averlo annotato su un manoscritto che ho esaminato". Nel presentare i suoi risultati sul vettore dell'energia all'Accademia, Klein ringraziava la Noether per il suo contributo al proprio lavoro. Nel rispondere a Klein, Hilbert sottolineava a sua volta: "Emmy Noether, al cui aiuto ho fatto ricorso per chiarire le questioni connesse alla mia legge dell'energia …". L'"esperto di teoria degli invarianti", come Hilbert una volta si era autodefinito, ricorreva all'aiuto dell'antica allieva del "re degli invarianti"! Nello stesso periodo la Noether raccontava a un'amica che un gruppo di Göttingen, al quale apparteneva anche lei, stava eseguendo calcoli difficilissimi per Einstein. "Nessuno di noi capisce a che cosa possano servire". A questo punto sembrerebbe proprio che anche Emmy stesse sguazzando in piena teoria della relatività. Il 24 maggio 1918 Einstein scrive a Hilbert a proposito di un articolo pubblicato da Emmy nel mese di gennaio: "Ieri ho ricevuto dalla signorina Noether un lavoro molto interessante sugli invarianti. Mi impressiona molto il fatto che qualcuno riesca a comprendere questioni di questo tipo da un punto di vista così generale. Non sarebbe stato male mandare la vecchia guardia di Göttingen a scuola dalla signorina Noether. Di sicuro sa perfettamente il fatto suo!"

Sophus Lie non visse abbastanza a lungo da vedere la sua visione profetica sulle leggi della natura come invarianti delle trasformazioni infinitesime realizzata pienamente nel lavoro di Emmy Noether, *Invariante Variationsprobleme,* presentato da Felix Klein nella riunione del 26 luglio 1918 della Reale Società delle Scienze di Göttingen.[6] Questo lavoro, in cui la Noether fornisce la soluzione di un problema relativo alla teoria della relatività generale che né Hilbert né Klein né Einstein erano stati in grado di risolvere, era destinato a influenzare profondamente lo sviluppo della fisica moderna.[7] Vi si presentavano due teoremi e i loro inversi che rivelavano nel modo più generale la connessione tra simmetrie e leggi di conservazione in fisica, generalizzando tutti i precedenti risultati a tutti i gruppi continui finiti e infiniti. Il lavoro della Noether incorporava in modo del tutto inedito differenti campi della matematica e della fisica matematica:

1) La teoria degli invarianti algebrici e differenziali
2) La geometria di Riemann e il calcolo delle variazioni nel contesto della relatività generale, della meccanica e della teoria dei campi
3) La teoria dei gruppi, in particolare la teoria dei gruppi di Lie per risolvere o ridurre le equazioni differenziali per mezzo dei loro gruppi di invarianza.

L'originalità di questo teorema consiste proprio nel fondare i principi di conservazione sull'invarianza formale delle leggi della fisica. L'interesse maggiore del teorema sta quindi nel mettere in corrispondenza ciascun principio di conservazione di una quantità fisica con una invarianza formale delle leggi. Più precisamente enuncia che, per ciascuna simmetria continua – come per esempio una rotazione nello spazio – o una simmetria discreta – come l'inversione temporale o riflessione spaziale – della funzione di Lagrange che rappresenta il sistema fisico, esiste una quantità che si conserva nel corso dell'evoluzione di questo sistema. Le conclusioni più interessanti del teorema si ottengono nel caso di trasformazioni cosiddette euclidee, perché in questo caso le grandezze conservate hanno una interpretazione fisica immediata. Le trasformazioni euclidee hanno la caratteristica di non deformare gli oggetti: si tratta di traslazioni temporali, traslazioni spaziali o rotazioni. In queste situazioni semplici il teorema fornisce i tre risultati seguenti: se la lagrangiana resta invariante (simmetrica) per una traslazione temporale, l'energia totale del sistema si conserva nel corso del movimento; nel caso di invarianza per traslazioni spaziali, la quantità che si conserva è l'impulso (quantità di moto del sistema); infine, se si ha invarianza per rotazione (i parametri necessari per descriverla sono tre), si conserva il momento angolare (tre componenti). Ciascuno dei tre grandi principi di conservazione della fisica si fonda quindi in ultima analisi su una simmetria di tipo particolare. Il teorema di Noether fa quindi apparire un legame del tutto inatteso fra il contenuto delle leggi fisiche e la struttura dello spazio-tempo stesso. La conservazione dell'energia in particolare ha come diretta implicazione la costanza delle leggi della fisica, e dunque l'uniformità del tempo. La conservazione della quantità di moto ci rinvia a quella che si potrebbe chiamare l'universalità delle leggi (la fisica si scrive nello stesso modo a Parigi e a Londra), e dunque all'uniformità dello spazio. La conservazione del momento angolare implica invece che lo spazio è isotropo (non esiste una direzione privilegiata).

Nel primo teorema Emmy Noether mostrava, come caso particolare, che in teorie del tipo della relatività generale esistono delle identità – nel caso di questa teoria sono le cosiddette identità di Bianchi – che forniscono delle leggi di conservazione locali di tipo differenziale le quali in uno spazio tempo piatto si trasformano nelle ordinarie leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.[8] La bellezza e l'importanza straordinaria di quello che diverrà noto come "Teorema di Noether" sta proprio nella combinazione di due proprietà: è estremamente generale da una parte e dall'altra fornisce la possibilità di costruire immediatamente le quantità conservate data la funzione di Lagrange e il suo gruppo di invarianza.

Nel lavoro di Emmy confluivano così una serie di ingredienti che ne facevano l'apice dell'evoluzione di questi campi di ricerca rendendo molto più profonda la comprensione dei principi di conservazione e fornendo lo strumento per le grandi scoperte delle simmetrie di gauge che caratterizzeranno il XX secolo, proprio grazie al fatto che il teorema si basa su una versione generalizzata della teoria del gruppi. La generalità del teorema è infatti tale che attraverso di esso la matematica ha acquistato una portata "euristica" del tutto inedita: diventa possibile derivare *a priori* e in modo del tutto stupefacente l'esistenza di entità fisiche ben determinate. Tutto ciò non ha fatto che accrescere il mistero sulla natura del potere creativo del linguaggio matematico, apparentemente un semplice "meccano" di simboli, come affermava Hilbert, eppure così prossimo alla natura delle cose. Il teorema di Noether non soltanto ha fornito un senso chiaro al principio di conservazione dell'energia, fino a quel momento avvolto nel mistero, ma andava ben oltre esponendo in forma più generale le conseguenze dinamiche delle simmetrie. In questo modo ha poi giocato un ruolo essenziale nella scoperta delle leggi fondamentali che governano le interazioni che si osservano tra particelle elementari. Le simmetrie che le riguardano, individuate a partire dal dopoguerra – e la comprensione che queste comportano delle conseguenze dinamiche – sono alla base della successiva formulazione del Modello Standard delle particelle elementari.

Questi risultati così fondamentali furono comprensibilmente molto apprezzati da Einstein, il quale, in una lettera a Hilbert si riferì al "penetrante pensiero matematico della Noether".

Questo lavoro, che rappresentò la sua tesi di abilitazione, si allontanava in qualche modo dalla sua principale linea di ricerca, lo sviluppo della moderna algebra astratta, un campo in cui, secondo l'autorevole parere di Hermann Weyl, la Noether "aveva creato un nuovo epocale stile di pensiero". Nel 1919 ottenne l'incarico di *Privatdozent*. Una posizione che rappresentava il più basso dei gradini nella scala accademica, che non comportava alcuno stipendio. Nel 1923 Hilbert riuscì a ottenere per lei l'incarico di *nicht-beamteter auseordentlicher Professor*, sempre non retribuito. Un incarico di insegnamento per l'algebra le consentì finalmente di disporre di un piccolo stipendio. Nel frattempo, le preoccupazioni dei membri più reazionari del Senato accademico venivano smentite in modo eclatante. Intorno a Emmy Noether ruotava uno dei più fertili gruppi di ricerca della Göttingen fra le due guerre.

Nel 1933, quando il partito nazista prese il potere, gli ebrei furono obbligati a lasciare le loro posizioni accademiche. La scuola di Hilbert riceve il colpo più duro. Nessun pregiudizio – di nazionalità, di sesso o razziale – vi aveva mai avuto cittadinanza. A quell'epoca a Göttingen ben tre dei quattro istituti di matematica e fisica erano guidati da ebrei: Richard Courant, James Franck e Max Born. Weyl prese il posto di Courant. Scrisse innumerevoli lettere, incontrò membri del governo, ma nulla poté essere cambiato. Sua moglie era in parte ebrea e gli amici, tra cui Einstein che era già a Princeton, lo scongiurarono di partire prima che avvenisse il peggio. L'ultimatum si applicava anche a Emmy Noether. Non si erano mai viste tante firme illustri come quelle poste in calce agli appelli inviati al Ministero per il caso Noether. Il nome di Hilbert era in cima alla lista. Hilbert aveva da poco compiuto settant'anni e il giorno del suo compleanno era stato ben lontano dall'immaginare sorte peggiore per la sua Göttingen. Durante un banchetto Hilbert fu apostrofato dal nuovo ministro nazista per l'educazione: "Come va la matematica a Göttingen, ora che l'abbiamo liberata dall'influenza ebraica?" "Matematica a Göttingen?" rispose Hilbert. "Non se ne vede più nemmeno l'ombra".

Circa due anni dopo la sua forzata emigrazione negli Stati Uniti, Emmy Noether morì inaspettatamente per una complicazione chirurgica, mentre era "all'apice del suo potere creativo", come disse Weyl. In un necrologio a lei dedicato, comparso il 3 maggio 1935 sul *New York Times,* Einstein commentò: "Gli sforzi della maggior parte degli esseri umani si consumano nella lotta per il pane quotidiano, ma la maggior parte di coloro che, o per fortuna o per un dono speciale, sono sollevati da questa lotta, sono largamente assorbiti nel migliorare i loro beni terreni. Dietro lo sforzo diretto ad accumulare i beni terreni risiede troppo frequentemente l'illusione che questo sia lo scopo più sostanziale e più fondamentale da raggiungere; fortunatamente, esiste una minoranza composta da coloro che molto presto riconoscono che le esperienze più belle e soddisfacenti offerte all'umanità non derivano dall'esterno, ma sono connesse con lo sviluppo delle sensazioni, pensieri e azioni dell'individuo. Gli artisti veri, i ricercatori e i pensatori sono sempre stati persone di questo tipo. Indipendentemente dal corso più evidente della vita di questi individui, i frutti dei loro sforzi restano nonostante tutto i contributi di maggior valore che una generazione può trasmettere ai suoi successori".

## Bibliografia


C. Reid, *Hilbert* (Springer Verlag, 1970).

H.A. Kastrup, "The contribution of Emmy Noether, Felix Klein and Sophus Lie to the modern concept of symmetries in physical systems"*, in Symmetries in physics (1600-1980), Proceedings of the 1st international Meeting on the History of Scientific Ideas* (a cura di M. G. Donce *et al.*, Universitat autònoma de Barcelona, 1987, p. 115.

H. Weyl, *La simmetria* (Feltrinelli 1962).

E. Mach, *Erkenntnis und Irrtum*, Leipzig 1917.

L.M. Yaglom, *Felix Klein and Sophus Lie. Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century* (Birkhäuser 1988).

A. Dicke, *Emmy Noether, 1882-1935* (Birkhäuser 1981).

A. Pais, *Sottile è il signore…* (Bollati Boringhieri, 1986).

N. Beyers, "The Life and Times of Emmy Noether: Contributions of Emmy Noether to Particle Physics", in *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics* (a cura di H.B. Newmann e T. Ypsilantis, Plenum Press 1996), p. 945.

B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (Bollati Boringhieri 1994).

L. Bonolis, "From the Rise of the Group Concept to the Stormy Onset of Group Theory in the New Quantum Mechanics. A saga of the invariant characterization of physical objects, events and theories", *Riv. Nuovo Cimento* **27**, N. 4-5 (2004).

U. Bottazzini, "Ricci and Levi-Civita: from differential invariant to general relativity", in *The Symbolic Universe, Geometry and Physics 1890-1930* (a cura di J.J. Grey, Oxford University Press 1999), p. 241.

K.A. Brading and H.R. Brown, "Symmetries and Noether's theorems", in *Symmetries in Physics. Philosophical Reflections* (a cura di K.A. Brading e E. Castellani, Cambridge University Press, 2003).

K. Chandrasekharan, *Hermann Weyl 1885-1985, Centenary Lectures* (Springer, 1986).

L. Corry, "David Hilbert and the axiomatization of physics (1894-1905)", *Arch. Hist. Ex. Sci.* **51** (1997), p. 89; "Hilbert and Physics", in *The Symbolic Universe, Geometry and Physics 1890-1930* (a cura di J.J. Grey, Oxford University Press 1999) p. 145.

R. Houtappel, H. van Dam, E. P. Wigner, "The conceptual Basis and Use of Geometric Invariance Principles", *Rev. Mod. Phys*. **37** (1965) p. 595.

J. Mehra, "The Göttingen Tradition of Mathematics and Physics from Gauss to Hilbert and Born and Franck", in J. Mehra, *The Golden Age of Theoretical Physics*, 2 Vol. (World Scientific 2001), Vol. 1, p. 404.

L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, 1997).

L. Pyenson, "Hermann Minkowski and Einstein's Special Theory of Relativity", *Arch. Hist. Ex. Sci.*, **17** (1977) p. 71; "Physics in the shadow of mathematics: the Göttingen electrontheory seminar of 1905", *Arch. Hist. Ex. Sci.*, **21** (1979) p. 55.

L. Radicati, "Einstein and the role of symmetry in modern physics", in *Origin of Symmetries* (a cura di C.D. Froggatt e H.B. Nielsen, World Scientific, 1991) p. 202.

D. Rowe, 1999, "The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's Theorems", in *The Symbolic Universe, Geometry and Physics 1890-1930* (a cura di J. J. Grey, Oxford University Press 1999), p. 189; "Einstein Meets Hilbert: At the Crossroads of Physics and Mathematics", *Phys. Perspective* **3** (2001) p. 379.

E.P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", in *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, No. I (febbraio 1960).

J. Mehra, The Göttingen tradition of Mathematics and Physics from Gauss to Hilbert and Born and Franck, in J. Mehra, *The Golden Age of Theoretical Physics*, World Scientific, 2001, p. 404-458

## Note

1 In quello stesso periodo Lise Meitner (1878-1968) studiava fisica, matematica e filosofia all'Università di Vienna, dove era entrata nel 1901. Nel 1906 fu la seconda donna a conseguire il dottorato in fisica all'Università di Vienna. Nel 1907 si trasferì a Berlino, dove seguì le lezioni di Max Planck e iniziò a collaborare con il radiochimico Otto Hahn, con cui avrebbe lavorato per oltre trent'anni. Poiché le donne in Prussia non erano ammesse all'università, Lise era costretta ad entrare dalla porta di servizio e non poteva accedere alle aule e ai laboratori degli studenti. Il divieto venne annullato solo nel 1909.

2 Il 18 novembre Einstein aveva scritto a Paul Ehrenfest: "Per alcuni giorni sono stato fuori di me per l'eccitazione e la gioia". La questione riguardava la precessione del perielio di Mercurio, per il quale Le Verrier, nel 1859, aveva riscontrato uno spostamento residuo di 38'' per secolo che non poteva essere spiegato in base agli effetti della gravitazione newtoniana e per la quale aveva ipotizzato "qualche azione sconosciuta". Nel 1882 tale avanzamento era stato fissato con precisione a 43'' per secolo. Einstein applicò la sua teoria della gravitazione e scoprì che poteva rendere esattamente conto dell'avanzamento residuo senza ricorre a lune invisibili né "ad alcuna speciale ipotesi". Contemporaneamente Einstein aveva calcolato con precisione l'entità della deflessione di un raggio di luce al suo passaggio in prossimità del forte campo gravitazionale esercitato dal Sole. Questa predizione sarà confermata sperimentalmente in modo spettacolare nel 1919, anno in cui la fama mondiale di Einstein salirà alle stelle. Questi calcoli furono appunto presentati da Einstein il 18 novembre 1915, in una memoria che precede di pochi giorni quella contenente le equazioni definitive del campo gravitazionale.

3 Recenti ricerche di archivio e l'analisi delle carte di Hilbert hanno dimostrato che in realtà non appare credibile la versione accreditata fino a qualche tempo fa che Hilbert e Einstein abbiano scoperto indipendentemente le stesse equazioni di campo. L'affermazione di Hilbert che le sue equazioni fossero in accordo con quelle di Einstein non è contenuta nella pagina iniziale delle bozze della rivista; in effetti, prima dell'epoca in cui l'articolo di Hilbert fu pubblicato in una forma revisionata alla fine di marzo del 1916, egli era stato in grado di modificare le sue equazioni di campo perché fossero in accordo con quelle di Einstein.

4 In meccanica un sistema viene formalmente caratterizzato da una funzione matematica che dipende dalla sua posizione (coordinate spaziali) e dalla sua velocità, oltre che dal tempo. Questa funzione, detta lagrangiana – dal nome del matematico di origine italiana Lagrange – è uguale alla differenza fra energia cinetica e energia potenziale del sistema. Il problema fondamentale consiste nel determinare quali sono le leggi fisiche che restano valide quando si cambia il sistema di coordinate, effettuando delle trasformazioni di simmetria: come nel caso delle rotazioni o delle traslazioni, per esempio.

5 La teoria della relatività generale è una cosiddetta *teoria di gauge*, ovvero è caratterizzata da un gruppo di simmetria continuo infinito, a cui appartiene come sottogruppo quello delle traslazioni temporali. L'invarianza rispetto al gruppo di trasformazioni che caratterizza la relatività generale equivale a postulare che ogni osservatore possa scegliere arbitrariamente i suoi sistemi inerziali. Ci troviamo per la prima volta di fronte a una simmetria locale anziché globale, la quale, invece di dipendere da un numero finito di parametri, dipende da sei funzioni arbitrarie. Una invarianza così vasta è una conseguenza necessaria della richiesta che la dinamica, e non soltanto la cinematica, possa essere ricondotta alla geometria.

6 La Noether probabilmente non era nemmeno presente alla seduta. Le donne non erano ammesse in società scientifiche così esclusive. A questo proposito infatti è bene sottolineare che la *Royal Society* di Londra, fondata nel 1662, ha eletto il primo membro di sesso femminile nel 1945 e l'Académie des Sciences di Parigi, fondata nel 1666, ha ammesso per la prima volta una donna soltanto nel 1962!

7 Il membro sinistro delle equazioni di campo di Einstein ($R^{\mu\nu} - 1/2\, g^{\mu\nu} R = T^{\mu\nu}$, dove $R^{\mu\nu}$ è il cosiddetto tensore di Ricci, $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico, R è la curvatura scalare e $T^{\mu\nu}$ è il tensore energia) soddisfa quattro

identità ($[R^{\mu\nu} - 1/2\, g^{\mu\nu} R]_{;\mu} = 0$) dette identità di Bianchi, dal nome del matematico italiano Luigi Bianchi, di cui, fino al 25 novembre 1915, Einstein, era certamente ancora all'oscuro. Il tensore $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - 1/2\, g^{\mu\nu} R$, detto appunto tensore di Einstein, perché fu Einstein a comprenderne l'importanza per la gravitazione, è costruito a partire esclusivamente dal tensore di Riemann e dalla metrica ed è automaticamente a divergenza nulla: $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Tuttavia Einstein non si rese conto che le identità di Bianchi implicano a loro volta che anche $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$; tale relazione esprime la conservazione dell'energia e dell'impulso. Così i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto conseguono *automaticamente* dalle equazioni del campo e dalle identità di Bianchi, mentre Einstein fece uso di questi principi di conservazione come di un vincolo imposto alla teoria, piuttosto che una conseguenza quasi immediata della covarianza generale. Le leggi di conservazione rimangono l'unico punto debole del lavoro di compendio pubblicato da Einstein nel marzo 1916 (*Annalen der Physik* 49, 769), dove esse sono verificate mediante un calcolo diretto anziché con una argomentazione basata sull'invarianza. Apparentemente neppure Hilbert conosceva le identità di Bianchi; e in effetti, nel novembre 1915 né Hilbert né Einstein erano ancora a conoscenza di questa strada maestra per la deduzione dei teoremi di conservazione. Il problema dei principi di conservazione nella relatività generale furono appunto affrontati da Emmy Noether a partire da quell'epoca. Nel 1918 Emmy Noether dimostrerà che le identità sono in realtà la conseguenza particolare di un teorema molto più generale.

[8] Il teorema di Noether dimostra che l'invarianza rispetto a trasformazioni dipendenti da funzioni arbitrarie dà luogo a leggi di conservazione locali anziché globali, come avviene nel caso di trasformazioni dipendenti da un numero finito di parametri. Questa località delle leggi di conservazione riflette la possibilità di scegliere localmente, anziché globalmente, il sistema di riferimento, ossia l'impossibilità di dare una separazione oggettiva fra inerzia e gravitazione a causa della complicazione introdotta dalla curvatura dello spazio-tempo e dall'uso di coordinate locali. Nella teoria generale l'energia non si conserva localmente, come avviene nelle teorie di campo classiche – gravitazione newtoniana, elettromagnetismo, idrodinamica, ecc. – dove si può dimostrare che il flusso di energia attraverso i confini di un volume arbitrario equivale al tasso con cui l'energia diminuisce all'interno del volume. Questo implica che c'è un trasferimento di energia verso e dal campo gravitazionale e quindi non ha senso parlare di una localizzazione dell'energia. In regioni dello spazio-tempo prossime a una sorgente gravitazionale, dove la curvatura di Riemann è diversa da zero, si produce localmente un venir meno del principio di conservazione dell'energia. Il bilancio energetico non può esser discusso indipendentemente dalle coordinate che si utilizzano per calcolarlo, e di conseguenza si ottengono risultati differenti in vari sistemi di coordinate - alcuni dei quali sono artefatti del calcolo stesso. Tuttavia, nonostante venga meno il principio di conservazione locale, esiste un principio di conservazione su larga scala, come dimostrò la Noether nel suo primo teorema.