

Luisa Bonolis

AIF, Gruppo di Storia della Fisica

# Il moto dei pianeti, ordine o caos? Il problema dei tre corpi, una sfida per la meccanica celeste

*Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.*

Henri Poincaré (*Science et Méthode*)

*There are more things in heaven and earth, Horatio,*

*Than are dreamt of in your philosophy*

William Shakespeare, *Hamlet* (Atto I, Scena V)

## Introduzione

I lavori di Galileo Galilei (1564-1642) fornirono le basi su cui Isaac Newton (1642-1727) edificò la meccanica. Lo studio matematico del moto dei corpi fu reso possibile da un punto di vista teorico dalla scoperta del *calcolo infinitesimale*, in cui la nozione di intervalli infinitesimi di tempo e di spazio sostituisce i movimenti descritti come successione discreta di differenze tra posizioni ad istanti diversi, e dalle tre *leggi del moto*. Conoscendo le condizioni iniziali – posizione e velocità del corpo in moto – la soluzione delle equazioni differenziali permette di calcolare la traiettoria ad un istante successivo, lontano nel futuro quanto si vuole. Applicando i suoi risultati ai corpi celesti, Newton ritrovò le traiettorie ellittiche scoperte da Johannes Kepler (1571-1630). Fino a Newton e alla legge di gravitazione universale, la descrizione dei moti degli astri era stata di carattere puramente cinematico e non dinamico. Nel primo libro dei *Principia*, Newton mostrò appunto che il moto di un pianeta intorno al Sole obbedisce alle tre leggi individuate da Keplero sulla base delle eccellenti osservazioni astronomiche effettuate da Tycho Brahe (1546-1601), e che ora venivano ad assumere un ben preciso significato nell'ambito della dinamica newtoniana.

Lo schema semplificato secondo cui la Terra – così come tutti i singoli pianeti del sistema solare – è attratta soltanto dal Sole è un caso molto speciale. In tale modello si considera che uno dei due corpi abbia una massa trascurabile rispetto all'altro, il che rende possibile assumere che il più massiccio sia a riposo e che l'altro gli ruoti intorno. Newton mostrò che la soluzione è molto simile nel caso generale di corpi di dimensioni confrontabili: entrambi i corpi si muovono lungo orbite ellittiche, e il baricentro del sistema si trova nel fuoco comune ad entrambi. Il problema dei due corpi può essere risolto in forma chiusa per mezzo di funzioni elementari. Una volta risolto questo caso più semplice, il passo successivo è naturalmente quello di trovare una soluzione per il *problema dei tre corpi*. Esempi particolarmente interessanti sono quelli del tipo Sole - Terra - Luna o del Sole e due pianeti. Soluzioni approssimate possono essere ricavate modificando la soluzione ottenuta per il problema a due corpi, tenendo conto dell'influenza del terzo. Questo metodo fu quello usato dallo stesso Newton nel 1687 per calcolare gli effetti del Sole sui moti della Luna intorno alla Terra, e più tardi, nel 1748, da Euler (1707-1783), per calcolare la perturbazione causata da Giove e Saturno nei loro reciproci moti intorno al Sole.

Soluzioni esatte di casi particolari del problema dei tre corpi furono trovate da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) nel 1722. Egli scoprì, per esempio, che è possibile che tre corpi si muovano su tre orbite ellittiche, con il baricentro del sistema in un fuoco comune. Oppure, che se i corpi sono collocati nei tre vertici di un triangolo equilatero, il triangolo ruota intorno al baricentro del sistema, e i corpi rimangono fissi nei vertici. Questa previsione teorica fu confermata nel 1906, quando si scoprì che questo tipo di situazione corrisponde al sistema formato dal Sole, da Giove e dall'asteroide Achille. Naturalmente ne esistono molte altre.

Se si conoscono le soluzioni delle equazioni che regolano un sistema fisico, è possibile prevedere in anticipo i fenomeni attraverso cui il sistema si manifesta. La conoscenza delle condizioni iniziali permette di calcolare l'evoluzione futura del sistema per tempi lontani quanto si vuole e con un buon grado di precisione. Le eclissi solari e lunari sono esempi di fenomeni prevedibili. Se si conoscono le equazioni del moto e le condizioni iniziali, tutto è prevedibile in questo universo newtoniano, determinato per sempre nei più piccoli dettagli. Tra il 1799 e il 1825 apparvero i cinque volumi della monumentale *Mécanique Céleste* di Pierre-Simone de Laplace (1749-1827), il culmine di un secolo e mezzo di scoperte. Basandosi sul senso profondo della nozione di moto deterministico, Laplace affermava che l'evoluzione dell'universo, passata e futura, potesse essere esattamente calcolata conoscendo la posizione e la velocità di ciascun corpo in un singolo istante:

Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, l'avvenire come il passato sarebbero presenti ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza [...] tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità tendono ad avvicinarlo continuamente all'intelligenza che abbiamo immaginato, ma da cui resterà sempre infinitamente lontano (P.S. de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1776).

Malgrado l'ottimismo di Laplace e di Lagrange, restavano aperti due problemi fondamentali: la ricerca di una soluzione esatta nel caso generale dei tre o più corpi, e la questione della stabilità delle soluzioni. Piccole perturbazioni del moto di un pianeta avrebbero causato piccole variazioni della sua orbita, o avrebbero invece fatto sì che il pianeta iniziasse a vagare nelle profondità dello spazio? Un'altra questione particolare riguardava l'effetto cumulativo delle reciproche perturbazioni tra i vari pianeti. Sarebbero state sufficienti a far deviare uno di loro dalla sua orbita – ed eventualmente farlo uscire dal sistema solare – o ci si doveva aspettare che le orbite nel loro insieme avrebbero conservato sostanzialmente la stessa configurazione? Nel riflettere sul problema delle attrazioni mutue, decisamente molto più deboli, che i pianeti esercitano l'uno sull'altro e che perturbano l'attrazione solare certamente dominante rispetto a queste, lo stesso Newton si era già posto il problema della possibilità che il sistema solare potesse non essere stabile e si era affidato alla potenza divina per rimettere le cose in ordine. Infatti, a parte l'interesse intrinseco del problema dei tre corpi, esso è strettamente collegato con la stabilità del sistema solare. Il problema fu affrontato da Lagrange e da Laplace, i quali, nel gettare le basi dei metodi della meccanica celeste, svilupparono procedure di calcolo approssimate molto complesse, arrivando alla conclusione che il sistema solare è stabile, e che i movimenti e le orbite sono leggermente più complicati di quelli calcolati da Newton.

Tuttavia, l'astronomo Urbain Le Verrier (1811-1877), dopo aver analizzato i loro metodi di approssimazione, restò turbato dall'esistenza di termini che diventano sempre più

piccoli nei denominatori dello sviluppo in serie che di volta in volta rappresentava la soluzione approssimata del problema e si chiese quindi se le serie convergessero effettivamente come supposto da Laplace e Lagrange. L'apparente semplicità del problema posto è, infatti, del tutto ingannevole e la questione potrà essere affrontata in tutta la sua complessità soltanto con l'avvento dei calcolatori elettronici, nel Novecento. In ogni caso, tra il 1750 e l'inizio del 1900 più di 800 lavori furono pubblicati su questo spinoso tema su cui si cimentarono insigni matematici ed astronomi. Ma bisognò attendere Henri Poincaré (1854-1912) perché lo studio del problema dei tre corpi, ormai divenuto di gran lunga il più celebre dei problemi della dinamica, cominciasse a svelare a poco a poco i suoi segreti.

Fin dall'epoca di Newton, i modelli matematici hanno giocato un ruolo vitale nelle scoperte scientifiche. Nel caso di Poincaré, un problema classico della dinamica celeste lo spinse a porsi domande fondamentali sul comportamento delle equazioni differenziali, il cui studio mise in luce l'esistenza di un comportamento del tutto inedito dei sistemi dinamici: la cosiddetta "sensibilità alle condizioni iniziali". Nella memoria *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, pubblicata nel 1890, il matematico francese non tentò, in effetti, di decidere se il sistema solare sia stabile o meno. Il suo lavoro di 270 pagine rappresenta il primo testo sulla teoria qualitativa dei sistemi dinamici, un significativo balzo in avanti, da cui hanno avuto origine una serie di linee di ricerca tuttora di enorme attualità. Poincaré mostrò che quando le mutue perturbazioni dei due pianeti sono espresse da serie che contengono una somma infinita di termini, esistono effettivamente delle situazioni che fanno tendere la serie all'infinito, rendendo così instabili le orbite da esse rappresentate. Una piccola differenza nelle condizioni iniziali può quindi portare a situazioni molto diverse in due orbite inizialmente vicine. Tale comportamento, intravisto appena da Poincaré, costituiva solo il primo indizio dell'esistenza di un mondo nuovo del tutto insospettato, la cui esplorazione ancora oggi prosegue e si articola nei più svariati settori della ricerca scientifica.

Il percorso che segue è da intendersi come un assaggio a volo d'uccello, che spera di stimolare letture ben più approfondite e circostanziate, alcune delle quali sono riportate in bibliografia.

### Henri Poincaré profeta del caos

Dalle leggi di Newton si ricavano le equazioni di moto degli  $N$  corpi che modellano il moto del Sole con  $N-1$  pianeti in modo straordinariamente accurato. Scrivere le equazioni del moto, non significa tuttavia saperle risolvere. Newton seppe risolvere soltanto le equazioni del problema di 2 corpi, ovvero quando si trascuri il fatto che i pianeti si attirano a loro volta tra loro, una approssimazione discreta considerando che le loro masse sono molto più piccole rispetto a quella del Sole (perfino Giove, di gran lunga il più massivo, ha una massa 1000 volte inferiore). In questo caso si ottiene un sistema integrabile e le orbite dei pianeti sono ellissi (movimento kepleriano). Nell'Ottocento, sulla scia dei lavori di Lagrange e Laplace, gli astronomi misero a punto dei metodi che consentivano di trovare delle soluzioni approssimate attraverso un metodo perturbativo consistente nella ricerca di un cambiamento di variabili che permettesse di ricondurre un sistema vicino a un sistema integrabile, a un prodotto di movimenti circolari uniformi. In generale, un sistema a  $N$  gradi di libertà è integrabile se lo si può scomporre in  $N$  sistemi indipendenti a un grado di libertà. La cosa è sempre possibile quando il sistema è lineare, e quindi tutti i sistemi lineari sono integrabili. Nel caso di sistemi integrabili, è possibile trovare un nuovo sistema di variabili in cui le equazioni divengono molto semplici e il moto si riassume in una composizione di moti circolari uniformi, ciascuno dotato della sua propria frequenza. In queste variabili il moto è detto *quasi periodico* e si svolge su un toro di dimensione  $n$  (vedi Fig. 1).

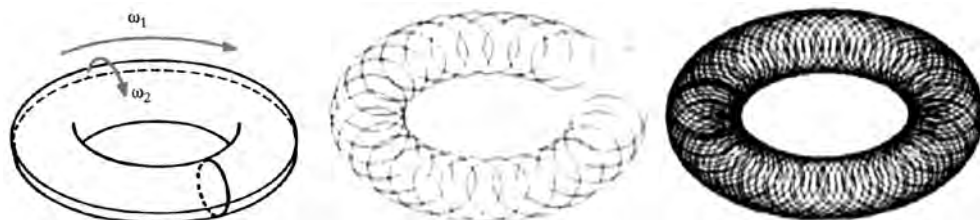


Figura 1. Fino a oltre la metà del Novecento la pratica abituale è stata quella di ridurre i problemi a problemi di *moti quasi periodici*, con la conseguente ricerca dei *modi normali* e delle *armoniche fondamentali*. Attorno a un toro ci sono due direzioni, una per il foro centrale, e l'altra, perpendicolare a questa, corre lungo l'equatore. Se si combinano due moti periodici, entrambi multipli interi di una medesima quantità, ne risulterà un altro moto periodico (al centro). Se il rapporto dei periodi è irrazionale i due periodi non hanno alcuna misura comune e la loro combinazione non si ripete mai (a destra). Essa "si ripete quasi" per multipli comuni approssimati del periodo. In uno spazio delle fasi a tre dimensioni, il toro rappresenta un *attrattore* per un sistema biperiodico.

La fisica newtoniana ha fornito la possibilità di una teoria dei moti dei sistemi meccanici di natura non astronomica e così la teoria dei moti dei sistemi più semplici, come oscillatori unidimensionali (pendoli), oscillatori armonici (corde vibranti), giroscopi ecc., ha consentito di concepire un moto più complesso come prodotto di moti circolari uniformi. Nel caso dei sistemi integrabili, le formule permettono di calcolare tutto il passato e tutto il futuro del sistema a partire dalle condizioni iniziali ( $n$  coordinate di posizione e  $n$  velocità ad esse collegate). Ma in genere i sistemi dinamici non sono integrabili (tranne quelli conservativi a un grado di libertà, che lo sono tutti) e quindi è impossibile trovare un cambiamento di variabili che ne consenta la scomposizione in moti semplici. I sistemi che si incontrano in meccanica celeste sono spesso vicini a sistemi integrabili e quindi, nel caso dei problemi planetari, è possibile trovare delle nuove coordinate sotto forma di serie in cui si introduce un "piccolo" parametro dell'ordine delle masse degli altri pianeti per tenere conto, seppure in modo approssimativo, di tutte le possibili interazioni gravitazionali considerate come "perturbazioni" del sistema a due corpi. In meccanica celeste, le soluzioni approssimate delle equazioni del moto forniscono serie infinite espresse in termini di variabili come l'eccentricità dell'orbita o qualche altro parametro orbitale. Procedendo per approssimazioni successive e iterando la funzione che rappresenta il modello del sistema, a ciascuna tappa ci si riconduce a un sistema integrabile, trascurando nelle equazioni la parte contenente potenze sempre più elevate del parametro. Nel conservare soltanto i primi termini, si spera che le quantità trascurate non abbiano un ruolo importante. Le soluzioni ottenute in questo modo sono delle funzioni quasi periodiche. La meccanica celeste consisteva quindi nell'affinare questi metodi perturbativi, cercando di conservare un numero sempre più alto di termini delle serie con un conseguente immaginabile lavoro di calcolo. Alla fine dell'Ottocento la meccanica celeste arrivò a livelli addirittura maniacali di precisione, tanto che quando fu trovata una discrepanza di 8 secondi d'arco al secolo nel moto apparente di Mercurio, questo apparve come un problema terribile. La spiegazione di questa anomalia, introvabile nell'ambito della teoria newtoniana, sarà il primo grande successo della teoria generale della relatività di Einstein.

"Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si cela l'avvenire, per gettare uno sguardo sui progressi della nostra scienza e sui segreti del suo ulteriore sviluppo nei secoli futuri?" osservava David Hilbert nella sua relazione *Sur les problèmes futurs des mathématiques* presentata al congresso di Parigi del 1900. Tra i 23 famosi problemi discussi da Hilbert c'era quello dei tre corpi, oggetto di studio da parte dei matematici fin dai tempi di Lagrange e suggerito dal movimento della Terra e della Luna rispetto al Sole. Lagrange aveva introdotto speciali soluzioni periodiche che si rivelarono importanti per affrontare il problema della stabilità del moto dei pianeti. Se si immagina di spostare leggermente un

pianeta dalla sua orbita, quale sarà il suo comportamento dopo un certo tempo? Oscillerà intorno alla sua orbita per poi riprenderla (orbita stabile) o se ne allontanerà definitivamente? Nell'età d'oro della meccanica celeste, durata quasi fino alla fine dell'Ottocento, le migliori menti matematiche si applicarono al problema dei tre o più corpi. Dopo Lagrange, nuove soluzioni periodiche del problema dei tre corpi furono trovate da George Hill (1838-1914) nelle sue ricerche sulla teoria della Luna. Poiché la soluzione generale del problema dei tre corpi tardava a venire, il re di Svezia, pare su suggerimento di Karl Weierstrass (1815-1897) e Gösta Mittag-Leffler, mise in palio un ingente premio in denaro per chi vi si fosse applicato con successo. Il premio sarebbe stato consegnato il 2 gennaio 1889, in occasione del compleanno di Oskar II, re di Svezia e Norvegia. Il problema, come formulato da Weierstrass, veniva posto in questi termini: "Per un sistema di un numero arbitrario di masse puntiformi che si attraggono l'una con l'altra secondo le leggi di Newton, assumendo che nessuna entri mai in collisione, fornire le coordinate dei singoli punti a un tempo qualsiasi come somma di serie uniformemente convergenti i cui termini siano costituiti da funzioni conosciute". Nel 1889 il premio fu attribuito a Henri Poincaré per la memoria *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, in cui dimostrava che il problema non aveva soluzione nel senso della definizione di soluzione proposta da Weierstrass: dimostrò che non esiste una soluzione generale semplice. Per arrivare a questa affermazione, Poincaré aveva sviluppato un programma di ricerca che non soltanto aveva fatto luce sulle questioni matematiche che ruotavano intorno al problema proposto, ma aveva sollevato un angolo del velo dietro cui si celava un nuovo insospettabile universo.

Lo scopo ultimo che Poincaré assegnava alla meccanica celeste era "quello di risolvere la grande questione di sapere se la legge di Newton è sufficiente da sola a spiegare tutti i fenomeni astronomici". Come ben sottolineava nel quarto capitolo della *Memoria*, le equazioni differenziali rappresentano la realtà come un *continuum* che scorre in modo regolare da un istante a quello successivo. In essenza, queste espressioni forniscono le relazioni che devono valere tra i valori di variabili come la posizione e la velocità in intervalli arbitrariamente piccoli prima e dopo un dato istante, secondo la seguente strategia: "Invece di considerare il progressivo sviluppo di un fenomeno nella sua interezza, bisogna semplicemente cercare di correlare un istante a quello immediatamente precedente, supponendo che lo stato effettivo del mondo dipenda soltanto dal passato più recente, senza essere direttamente influenzato, per così dire, dalla memoria del passato distante. Grazie a questo postulato, piuttosto che studiare direttamente l'intera successione di un fenomeno, ci si può limitare a scrivere la sua 'equazione differenziale'". A questo punto, il problema è quello di integrare questi segmenti infinitesimi per dedurre dalle relazioni espresse il corso del fenomeno da uno stato iniziale dato a uno stato finale. In genere, la difficoltà – se non l'impossibilità – di risolvere queste equazioni faceva sì che ci si focalizzasse su quella ristretta minoranza di equazioni più facili da affrontare, considerando soltanto un insieme di possibilità alla volta. Al contrario, Poincaré voleva vedere immediatamente l'intero insieme delle possibilità. Influenzato dal lavoro di George Hill sul problema dei tre corpi e il moto lunare, il matematico francese era interessato a indagare sulla assunzione generale che piccoli cambiamenti in un parametro di una equazione differenziale avrebbero avuto come conseguenza soltanto piccole differenze nei numeri che costituiscono la soluzione, cioè nel comportamento d'insieme. Era convinto che questo approccio avrebbe alla fine fatto luce su specifici problemi della meccanica celeste: "Non potremmo chiederci se uno dei corpi rimarrà sempre in una certa regione dei cieli, o se se ne allontanerà sempre di più, per sempre; se la distanza tra due corpi crescerà o diminuirà in un futuro lontano quanto si voglia, o se invece rimarrà confinata tra certi limiti per sempre? Non ci si potrebbe fare migliaia di domande di questo tipo, che sarebbero tutte risolte quando riuscissimo a capire come costruire qualitativamente le traiettorie di tre corpi?" La sua strategia era quella di un esploratore che si avventura in un territorio sconosciuto. La terra esplorata da Poincaré era quella dello spazio delle fasi, il costruito astrat-

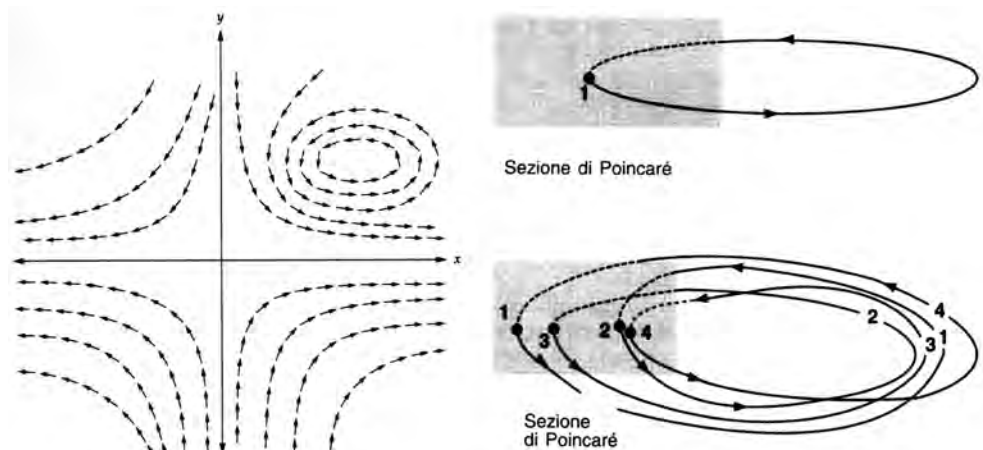


Figura 2. Un modo di rappresentare il comportamento globale di un insieme di equazioni differenziali consiste nel tracciare delle piccole frecce, dei vettori, che indicano la direzione del “flusso” in vari punti dello spazio. Il metodo utilizzato da Poincaré per studiare sistemi nello spazio a più dimensioni consisteva nel tagliare la traiettoria con un piano dello spazio delle fasi, rilevando in questo piano tutti i suoi punti di intersezione che lo attraversano in un verso dato. La figura mostra le sezioni di Poincaré per un moto periodico semplice e un moto più complicato, ma ugualmente periodico, che alla fine si ripete dopo quattro passaggi intersecando il piano in quattro punti distinti [J. Gleick, 1997].

to che fornisce un supporto alle forme geometriche generate dai flussi, che rappresentano la totalità delle soluzioni delle equazioni differenziali. A prescindere da quanto sia complicato il sistema in esame, un singolo punto dello spazio delle fasi riassume in sé l'intero stato di moto del sistema a un particolare istante. Il tasso di variazione di ciascuna coordinata, fornito dalle equazioni, indica la direzione associata a ciascun punto dello spazio delle fasi. Il flusso delle frecce tracciate punto per punto indica l'evoluzione del sistema: al variare dello stato, il punto percorre un cammino attraverso lo spazio delle fasi. Risolvere le equazioni, in effetti, è equivalente a costruire le curve date dalla direzione delle frecce punto per punto. Il risultato è una traiettoria, un'orbita che attraversa questo spazio astratto, molto diverso da quello reale a tre dimensioni attraverso cui il pianeta reale si muove. In questo approccio geometrico, si possono immaginare tutte le possibili soluzioni di un insieme di equazioni differenziali come un flusso d'acqua, con le equazioni che specificano la velocità in ogni punto del fluido. In questo modo si ottiene una visione d'insieme della dinamica rappresentata dalle equazioni (Fig. 2). Per un sistema semplice la forma assunta dall'orbita può essere semplicemente una superficie curva, come un toro. In sistemi più complicati, la forma può estendersi in più dimensioni ed avere un andamento più complesso e irregolare. Nel caso di due corpi interagenti attraverso la forza gravitazionale, il moto nello spazio fisico corrisponde alle ellissi scoperte da Keplero, che nello spazio delle fasi producono semplici cammini chiusi che si ripetono periodicamente. L'aggiunta di un terzo corpo, tuttavia, disturba questa rappresentazione semplice. La conservazione dell'energia e dell'impulso non sono sufficienti a restringere i possibili moti a una superficie o forma trattabile e facile da definire. Perfino nel caso in cui uno dei corpi ha una massa così piccola da non influenzare quasi gli altri due, la geometria dello spazio delle fasi diventa straordinariamente complicata e difficile da visualizzare. Le traiettorie che rappresentano le storie dei tre corpi hanno una considerevole libertà di vagare e di girare attraverso lo spazio delle fasi. La prospettiva geometrica introdotta da Poincaré gli permise di affrontare il comportamento delle soluzioni delle equazioni differenziali della meccanica celeste spostando l'enfasi dalle soluzioni specifiche alla loro totalità rappresentata dai flussi. Nel fare questo, lo studio delle equazioni differenziali da numeri, formule



e manipolazione di espressioni algebriche si spostò alla geometria, alle curve e alla visualizzazione dei flussi. Invece di guardare ai contenuti del suo problema matematico, Poincaré dedicò la sua attenzione al problema in sé per ottenere le chiavi necessarie a determinare se una serie converge e quali siano le implicazioni di quel risultato per la stabilità di un sistema dinamico.

Poincaré studiò il problema dei tre corpi idealizzato, chiamato modello ridotto di Hill. Una particella di polvere viene del tutto ignorata da due grossi corpi celesti che procedono tranquillamente nel loro moto circolare attorno al centro di gravità comune. Per cercare di comprendere l'evoluzione di un sistema nello spazio delle fasi, Poincaré scoprì che poteva ottenere delle mappe stroboscopiche osservando la geometria che si crea quando le traiettorie intersecano periodicamente un piano immaginario lungo il loro cammino. La *sezione di Poincaré* fornisce una scorciatoia per identificare i vari tipi di orbite (Fig. 2).

Osservando cosa accade nelle immediate vicinanze di orbite periodiche, scoprì con sorpresa che traiettorie che partono da punti leggermente diversi possono separarsi molto rapidamente. Trovò anche che le sequenze risultanti di punti possono riempire l'intera regione della sezione, mostrando così che la traiettoria vaga in modo irregolare attraverso lo spazio delle fasi, senza tornare apparentemente al punto di partenza. Nella monumentale trilogia *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* pubblicata tra il 1892 e il 1899, Poincaré mostrò che nei problemi del tipo di quello dei tre corpi dovevano presentarsi per forza delle orbite instabili (cioè tali per cui un piccolo cambiamento delle condizioni iniziali portava ad un cambiamento notevole dell'orbita) e che queste orbite instabili dovevano avere dei *punti omoclinici* (*omoclinico*, "che tende verso lo stesso"). Il termine inventato da Poincaré vuol dire che vi sono delle orbite che col trascorrere del tempo si avvicinano sempre più all'orbita instabile, ma anche che provengono da situazioni arbitrariamente vicine all'orbita instabile, come si scopre seguendole abbastanza a lungo nel passato. Nel suo monumentale trattato sulla meccanica celeste, Poincaré osservava a questo proposito: "Si è colpiti dalla complessità di questa figura, che non tento nemmeno di tracciare. Nulla può fornirci un'idea migliore della complessità del problema dei tre corpi, e più in generale di tutti i problemi della dinamica...".

Nel terzo capitolo della sua *Memoria* Poincaré affrontava il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche dimostrando che le costruzioni ottenute formalmente non forniscono una soluzione rappresentativa del moto effettivo dei pianeti. Infatti, le serie che intervengono sono in generale divergenti, per cui, a partire da un certo momento, l'aggiunta di termini deteriora la soluzione, piuttosto che migliorarla. Inoltre, le soluzioni ottenute dagli astronomi nel troncamento delle serie ottenute con metodi perturbativi forniscono una buona approssimazione su tempi finiti, ma non permettono di valutare la stabilità del sistema solare per un tempo infinito. Il risultato di Poincaré non proibiva che si potesse calcolare una soluzione approssimata valida per un certo intervallo di tempo; proibiva però che si potesse calcolare con un errore arbitrariamente piccolo una soluzione valida per un tempo arbitrariamente grande e per tutte le condizioni iniziali. Applicando il suo metodo della superficie di sezione al modello ridotto di Hill, Poincaré cercava i moti periodici della particella di polvere nel campo gravitazionale di due corpi di grande massa. Nello studiare il problema posto da Le Verrier, Poincaré dimostrò che non è possibile trovare soluzioni analitiche al problema dei tre corpi; questo significa da una parte che non è possibile esprimere il moto attraverso funzioni analitiche, ma dall'altra significa anche che, se si tenta di ottenere una soluzione approssimata attraverso uno sviluppo in serie, a lungo termine queste serie non convergono. Il sistema a tre corpi è dunque instabile, il che significa che moti erratici possono prodursi nel caso del sistema solare in presenza di certe condizioni. A differenza dei moti erratici di una particella che si muove di moto browniano (un grandissimo numero di eventi indipendenti), qui vediamo apparire una imprevedibilità legata all'interazione tra un numero molto ristretto di corpi. Il paradosso di ciò che viene chiamato "caos deterministico" risiede nel fatto che il sistema è molto semplice e le

equazioni che lo governano sono esse stesse molto semplici (seppure impossibili da risolvere analiticamente) e completamente deterministiche nella misura in cui il caso non interviene, e che tuttavia determinano una imprevedibile erraticità. Il caos di cui si parla qui non significa "assenza di ordine", ma si collega piuttosto alla nozione di imprevedibilità, di impossibilità di fare previsioni a lungo termine.

Poincaré descrisse con molta chiarezza il fenomeno del caos deterministico, scrivendo nel 1908 (*Science et Méthode*):

Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile e abbiamo un fenomeno fortuito.

I suoi risultati, benché molto famosi, non furono molto studiati dagli astronomi, in parte a causa della difficoltà relativa alla lettura della sua opera, in parte a causa del fatto che in pratica non si sapeva se i suoi risultati fossero rilevanti per le scale di tempo che interessano agli astronomi, o solo una curiosità matematica. Poincaré aveva sistematicamente demolito le aspirazioni di Weierstrass introducendo dubbio e incertezza, laddove il matematico tedesco aveva previsto una chiara soluzione che avrebbe preparato la via a una perpetua certezza. Il velo sollevato da Poincaré lasciava in sospeso una inquietante questione: da dove proviene questa impossibilità di previsione, malgrado il carattere totalmente deterministico delle leggi del moto?

### **Orme del caos nello spazio delle fasi di semplici sistemi dinamici**

Una piccola spinta, in un verso o in un altro, basta a far rotolare giù un sasso posto in equilibrio sulla cima di un monte lungo percorsi molto diversi. Il sasso è sensibile a piccole azioni solo quando è sulla cima del monte; i sistemi caotici invece sono sensibili in ogni punto del loro moto. Un esempio che bene illustra quanto certi sistemi fisici siano sensibili alle azioni esterne si ha considerando una partita a biliardo. Nel caso ideale si può supporre che le palle si muovano sul tavolo e si urtino con una perdita di energia trascurabile. Con un solo colpo il giocatore provoca una prolungata successione di collisioni. Se possedesse un controllo perfetto del proprio colpo, per quanto tempo potrebbe dimostrarsi valida la previsione della traiettoria della palla colpita dalla stecca? Se il giocatore ignorasse effetti anche minimi, la sua previsione sarebbe errata già dopo un solo minuto. Questo cospicuo aumento dell'indeterminazione deriva dal fatto che le palle sono curve e che in ciascuna collisione vengono amplificate le piccole differenze nel punto di contatto. Quest'amplificazione è esponenziale: viene composta a ogni collisione. Qualunque effetto, per quanto piccolo, acquista rapidamente proporzioni macroscopiche. In effetti, la nostra conoscenza dello stato iniziale è sempre caratterizzata da una certa imprecisione, per quanto piccola. Nei sistemi caotici, questa imprecisione si amplifica in maniera esponenziale impedendo le nostre previsioni sullo stato finale. Questa è una delle caratteristiche fondamentali del caos (Fig. 3).

Il più ampio quadro concettuale dal quale il caos emerge è la teoria dei sistemi dinamici. Un sistema dinamico è definito formalmente da uno spazio delle fasi, costituito dai



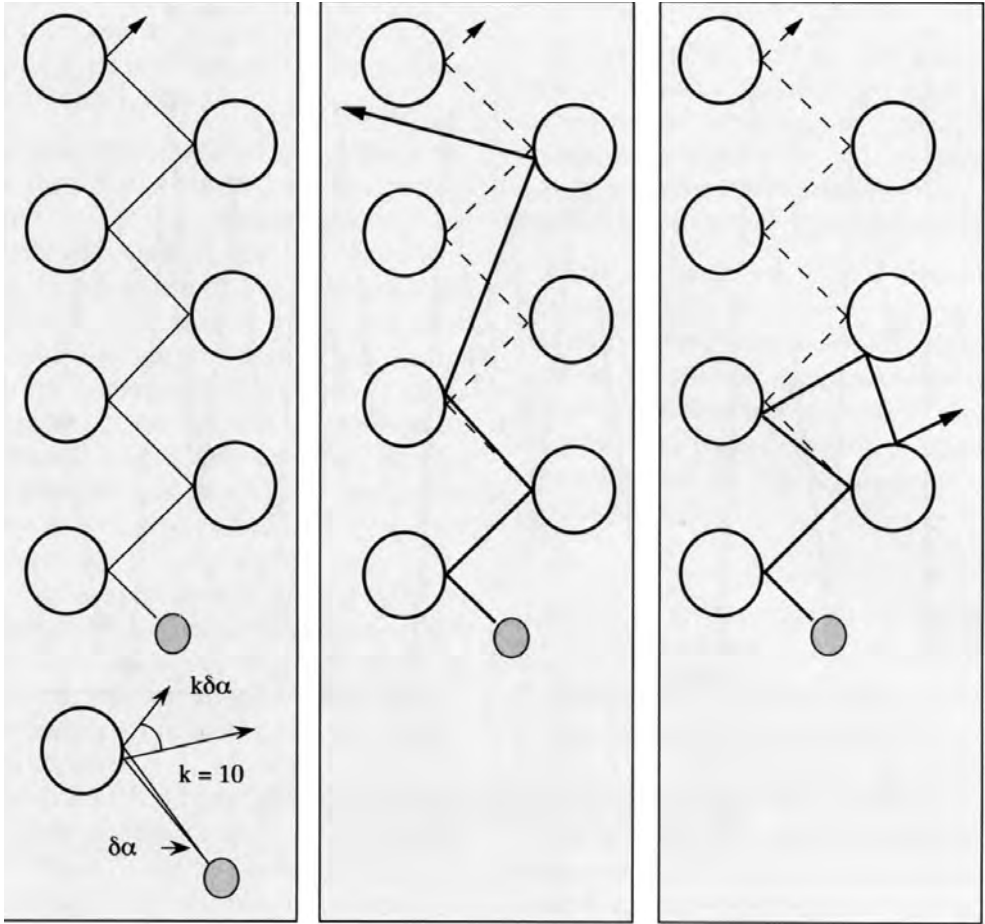


Figura 3. Si consideri il moto di una pallina di raggio  $d$  che rotola su un tavolo da biliardo con degli ostacoli circolari fissi, assumendo che gli urti siano perfettamente elastici: il problema equivale a quello del moto di un corpo puntiforme che si muove su un biliardo con i lati diminuiti di  $2d$  e con gli ostacoli il cui raggio è aumentato di  $d$ . In ogni urto l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione. Disponendo di due biliardi identici e lanciando simultaneamente una pallina su ciascuno dei due, a partire dalla stessa posizione, con la stessa velocità iniziale, ma in direzioni leggermente diverse, le due traiettorie evolveranno in modo differente, divergendo molto rapidamente. Dopo appena 20 secondi (1 urto al secondo, in media) i due moti non avranno più niente in comune.

possibili stati del sistema (cioè le informazioni essenziali sul sistema) e la dinamica, una legge deterministica che descrive l'evoluzione dello stato nel tempo: dato lo stato del sistema al tempo  $t = 0$ , specificato dal vettore  $x(0)$  nello spazio delle fasi, la legge determina lo stato  $x(t)$  al tempo  $t$  in modo univoco. L'evoluzione visualizzata nello spazio delle fasi, pur essendo astratta, contiene sotto forma geometrica una informazione concreta. Le grandezze che sono alla base della costruzione di questo spazio sono delle grandezze reali e le coordinate in ciascun punto rappresentano le componenti dello stato a cui corrisponde quindi una situazione fisica ben determinata. La scelta delle variabili non è arbitraria, essa deve essere quella necessaria e sufficiente a contenere tutta l'informazione sulla dinamica del sistema studiato. Devono essere inoltre indipendenti, in modo che ciascuna apporti la sua propria informazione. Questo implica che se una di loro non è definita, resta una certa libertà nella determinazione dello stato considerato.

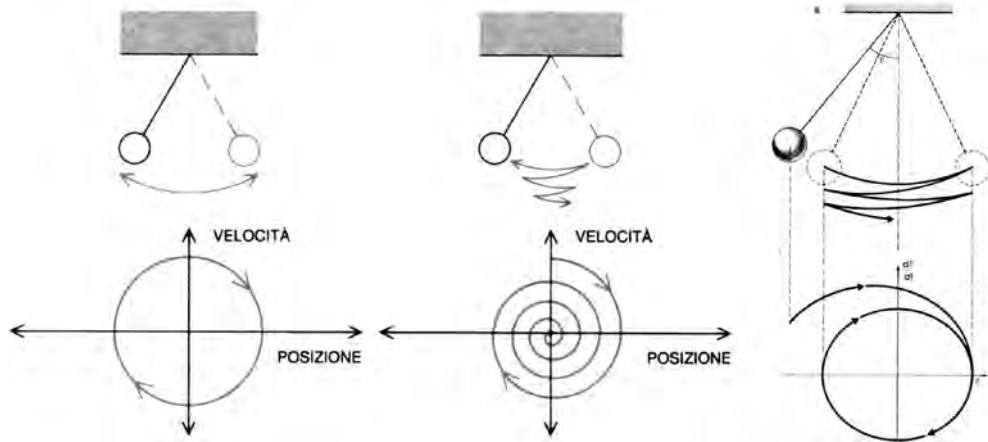


Figura 4. Spazio delle fasi a due dimensioni per il pendolo semplice. Nel moto armonico semplice la forza motrice è proporzionale allo spostamento ed è completamente determinato dalla sua posizione e velocità iniziali. In assenza di attrito il sistema oscilla indefinitamente e la “traiettoria dinamica” del sistema nello spazio delle fasi è una curva chiusa descritta periodicamente dal punto che rappresenta lo stato del sistema. La curva a sinistra corrisponde a una coppia di condizioni iniziali che definiscono anche l’energia totale del problema, che in questo caso si conserva durante il moto. Al variare delle condizioni iniziali si ottiene una famiglia di curve che copre l’intero piano. In presenza di attriti (sistema dissipativo) tutte le traiettorie possibili convergono verso un *punto fisso* (stato stazionario: velocità e angolo nulli) che rappresenta un *attrattore* per questo sistema (al centro). Per questo motivo negli orologi si cerca di mantenere le oscillazioni bilanciando gli effetti dello smorzamento compensando l’energia dissipata con il famoso sistema a scappamento inventato da Christian Huygens. In questo caso, indipendentemente dall’ampiezza iniziale, il sistema evolve verso uno stato il cui periodo dipende dall’attrito e dalla forza che lo mantiene in oscillazione. Questo si traduce nel convergere delle traiettorie dinamiche verso una curva unica chiusa (una ellisse, se le oscillazioni restano di piccola ampiezza) descritta periodicamente dal punto che rappresenta il pendolo (a destra). Questa curva chiusa che rappresenta un regime periodico fu denominata *ciclo limite* da Poincaré. Anche il ciclo limite rappresenta un *attrattore* a cui convergono le traiettorie dinamiche a partire da tutte le possibili condizioni iniziali.

Un buon esempio di sistema dinamico è offerto dal pendolo semplice. Per un sistema semplice, come il pendolo senza attrito, le equazioni del moto hanno una soluzione in forma chiusa, cioè una formula che esprime qualunque stato futuro in termini dello stato iniziale. Lo stato di un pendolo ideale è unicamente definito dall’angolo e dalla velocità angolare, cosicché lo spazio degli stati è rappresentato dall’insieme di tutte le possibili coppie (angolo, velocità angolare). Il numero di gradi di libertà del sistema dinamico (il numero delle variabili necessarie alla sua descrizione completa) definisce la dimensione del suo spazio delle fasi. Se è definita la posizione a un istante dato, resta ancora tutta la libertà di fissare la velocità. Se invece posizione e velocità sono determinate, tutta la dinamica resta definita. Il numero di gradi di libertà del sistema determina la dimensione dello spazio delle fasi. Così il pendolo semplice, che ha uno spazio delle fasi a due dimensioni, è un sistema a due gradi di libertà (Fig. 4). Invece, l’acqua turbinosa di un torrente possiede un grandissimo numero di gradi di libertà, legati alla presenza di vortici di dimensioni e velocità differenti. Le leggi di Newton forniscono una legge, che assume la forma matematica di un’equazione differenziale, per descrivere l’evoluzione dello stato. Le figure nello spazio delle fasi forniscono una rappresentazione geometrica delle traiettorie di un sistema dinamico. A ciascun insieme di condizioni iniziali corrisponde una curva. Queste figure possono rivelare informazioni sull’esistenza di attrattori o “repulsori” o cicli limite per la corrispondente scelta dei parametri iniziali. Quando il pendolo oscilla avanti e indietro, il suo stato si sposta lungo una curva del piano, detta “orbita”. Nel caso ideale di un pendolo privo di attrito, l’orbita è una curva chiusa; altrimenti è una curva a spirale che converge verso un punto fisso, un *attrattore*, corrispondente allo stato di quiete.

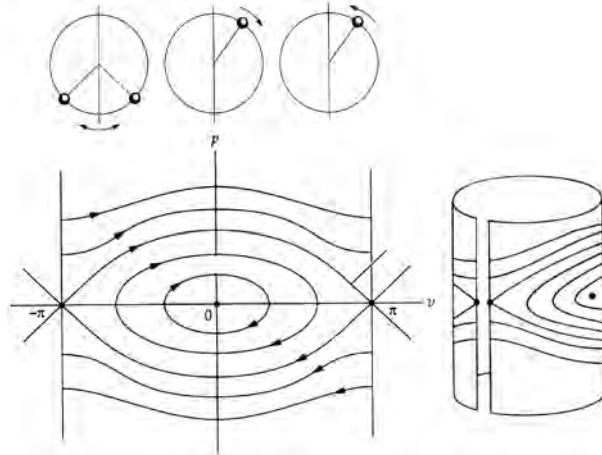


Figura 5. Piano delle fasi per un pendolo reale. La “pupilla” dell’occhio è il moto di energia minima, che corrisponde al pendolo immobile in posizione verticale, è il più basso livello di energia possibile del sistema. All’aumentare dell’energia si ottengono gli ovali chiusi, corrispondenti alle oscillazioni normali del pendolo (*tic tac*), stati periodici. Il contorno dell’occhio rappresenta la *separatrice*, la traiettoria che divide le oscillazioni (librazioni) dal moto circolare. È la traiettoria che il pendolo seguirebbe se fosse tenuto verticalmente verso l’alto e poi liberato. È uno stato instabile, come uno spillo in equilibrio sulla punta. Il minimo disturbo può mettere in moto il pendolo che inizialmente si muove con lentezza infinita, acquista velocità, passa per il punto più basso e risale sempre più lentamente verso la cima. Quando il pendolo è dotato di grande energia e si muove come un’elica di aereo, il moto circolare può essere in due direzioni diverse corrispondenti alle curve in alto e in basso, che si trovano oltre la *separatrice* e che corrispondono a due tipi distinti di moto periodico.

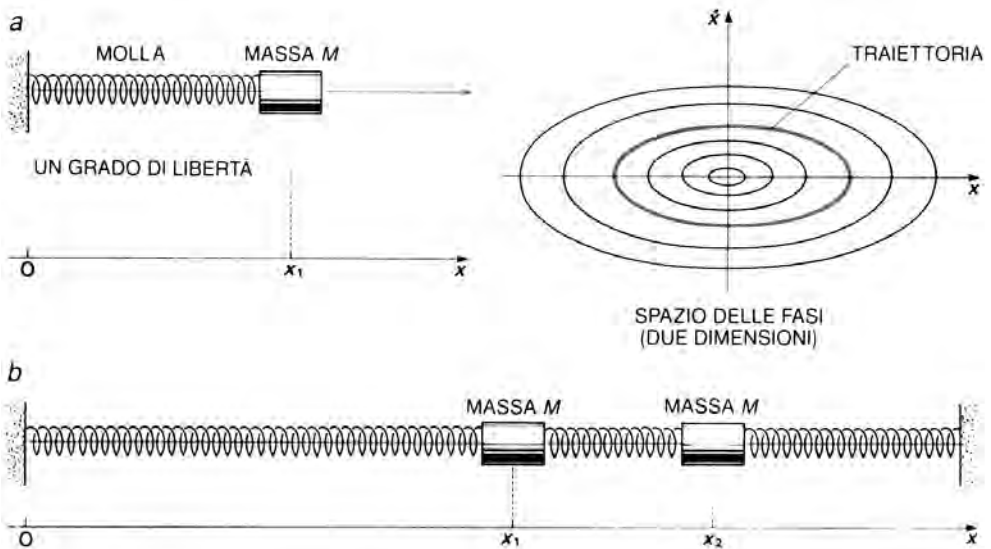


Figura 6. Nel caso di una massa collegata ad una molla, lo spazio delle fasi del sistema ha due dimensioni. Le traiettorie sono ellissi che dipendono dalle condizioni iniziali. Nel caso di due solidi collegati da molle, lo spazio delle fasi ha quattro dimensioni. Per mezzo del cambiamento di coordinate  $X = x_1 + x_2$  e  $Y = x_1 - x_2$  si ottengono equazioni identiche a quelle del caso precedente: le soluzioni sono quelle di due oscillatori indipendenti (modi caratteristici del sistema) e le traiettorie si inscrivono su tori a due dimensioni dello spazio delle fasi a quattro dimensioni.

te del pendolo. La curva chiusa, detta da Poincaré “ciclo limite del sistema dissipativo”, rappresenta invece il caso in cui l’energia che alimenta il moto compensa esattamente le perdite per attrito. Tale ciclo limite rappresenta anch’esso un *attrattore*, nel senso che qualsiasi perturbazione della traiettoria riconduce spontaneamente il sistema verso il ciclo limite (Fig. 4).

Nel caso di un pendolo reale, esiste la possibilità di grandi oscillazioni e rotazioni. Le soluzioni sono funzioni ellittiche; tuttavia, in assenza di attrito, la somma dell’energia cinetica e dell’energia potenziale rimane la stessa durante tutto il movimento (Fig. 5).

In effetti il numero di gradi di libertà gioca un ruolo capitale nella comparsa e nella caratterizzazione dei comportamenti caotici. Il pendolo semplice non conduce ad alcun comportamento imprevedibile e caotico (il che giustifica la sua utilizzazione come strumento di misura del tempo per oscillazioni di piccola ampiezza). Tuttavia è sufficiente semplicemente aggiungere una terza variabile perché, in certe condizioni, si sviluppino comportamenti instabili. Un mezzo semplice consiste, per esempio, nel far variare periodicamente la lunghezza della sospensione; in questo caso si possono sia mantenere le oscillazioni, sia renderle caotiche.

In questo tipo di sistemi, lo spazio delle fasi corrispondente è costruito a partire dalle variabili dell’oscillatore semplice di partenza, a cui si aggiunge una variabile supplementare legata alla forza periodica esterna, tipicamente la sua fase. Intuitivamente, si può capire che il suo effetto sarà diverso a seconda che sia in fase o in opposizione di fase con il moto proprio del pendolo. Se le due frequenze in gioco (la frequenza propria del pendolo e la frequenza dell’oscillatore esterno) sono incommensurabili, la traiettoria, invece di tornare periodicamente su se stessa, finisce per ricoprire interamente il toro avvolgendosi intorno ad esso al passare del tempo. Non è banale seguire questa traiettoria in uno spazio a tre dimensioni. Poincaré utilizzò appunto il metodo di sezionare lo spazio delle fasi per diminuire di una unità la dimensione necessaria a rappresentarla. Un esempio notevole di pendolo forzato periodicamente è rappresentato dall’incensiere della cattedrale di San Giacomo di Compostela, dove più officianti tirano periodicamente la corda della sospensione dando all’incensiere un movimento oscillante la cui ampiezza è tale che finisce per raggiungere la volta della cattedrale (Fig. 7). Naturalmente vengono evitate le sequenze caotiche. Il diagramma delle fasi di tale sistema comporta tre dimensioni determinate dalla fase forzante, dall’angolo e dalla velocità angolare. L’attrattore è nettamente più complicato. Per studiarlo si può immaginare di rilevare la posizione e la velocità del pendolo ogni volta che la terza variabile (in questo caso la lunghezza della sospensione) ritorna allo stesso valore. L’insieme dei punti rappresentativi ottenuti nel piano  $L = \text{costante}$  costituisce appunto la *sezione di Poincaré*. Se il periodo  $T_f$  con cui si agisce sulla sospensione è lo stesso che mantiene l’oscillazione (il sincronismo si ottiene per  $T = 2T_f$ ), la sezione di Poincaré è semplicemente costituita da due punti (l’attrattore periodico buca la sezione una volta in ciascun senso in corrispondenza di ciascuna oscillazione) (Fig. 8).

Per periodi del tipo  $T_f \neq (p/q)T$ , la sezione di Poincaré ha l’aspetto corrispondente a un attrattore molto più complicato, ma che ha ancora l’aspetto di una curva regolare (Fig. 9). Nel caso in cui il sistema viene mandato in regime caotico la sezione di Poincaré rivela un *attrattore strano*. Partendo da soltanto tre variabili nello spazio delle fasi, un sistema dinamico non lineare può quindi divenire caotico.

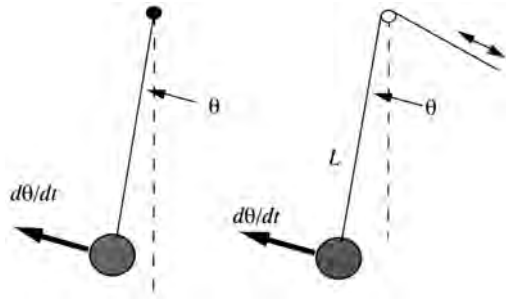


Figura 7. Pendolo semplice e pendolo forzato attraverso un periodico allungamento della sospensione.

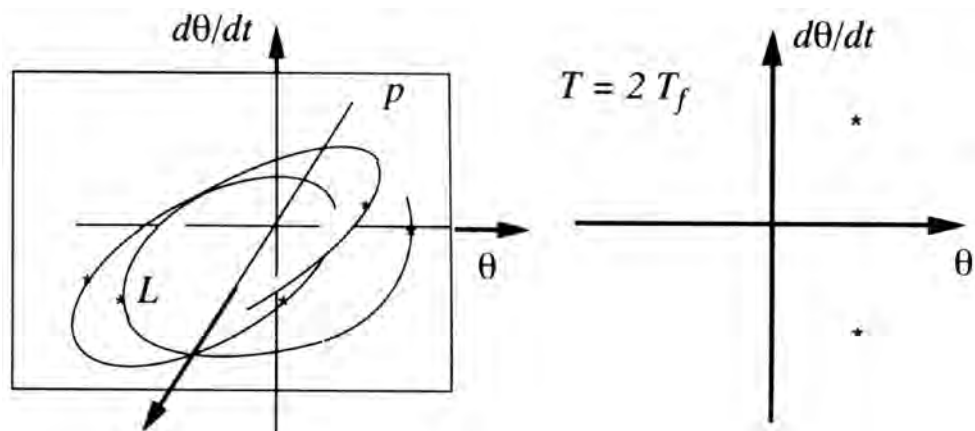


Figura 8. Per studiare la traiettoria di un sistema nello spazio delle fasi, si possono studiare le sue intersezioni successive con un piano opportunamente scelto. Si ottiene quindi una *sezione di Poincaré*.

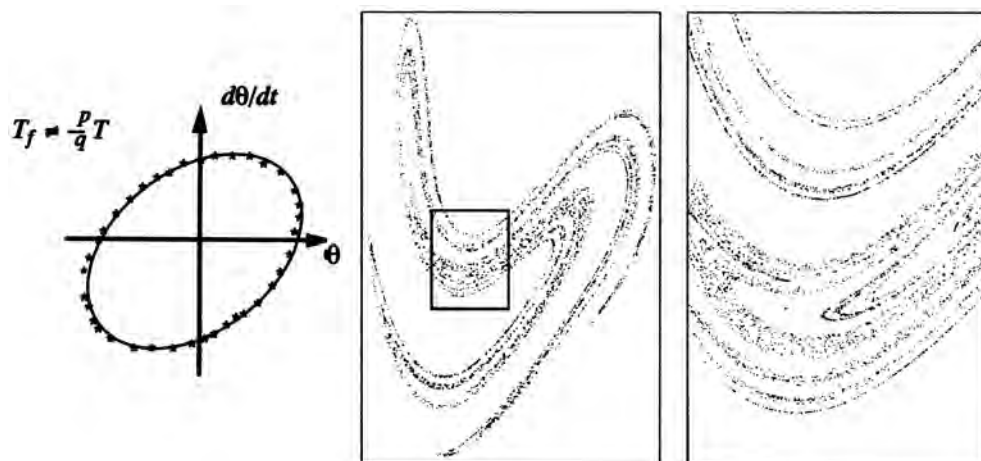


Figura 9. Sezione di Poincaré con attrattore del pendolo forzato con periodi del tipo  $T_f \neq (p/q)T$  (regime quasi periodico). Al centro attrattore strano per il pendolo forzato in regime caotico. L'attrattore che rappresenta il comportamento caotico di un sistema fisico è il frutto di un complesso miscuglio dove intervengono tre ingredienti: contrazione, stiramento e ripiegatura. La struttura frattale ha un carattere di autosomiglianza interna: si ripete a tutte le scale come mostra a destra l'ingrandimento della zona compresa nel rettangolo.

Nello spazio delle fasi la traiettoria è il risultato di due ingredienti che sembrano incompatibili tra loro. La sensibilità alle condizioni iniziali conduce a una crescita esponenziale della distanza tra diverse traiettorie originariamente vicine (caratterizzate da un esponente detto *esponente di Lyapunov*). Se lo stato di un sistema è specificato da  $n$  variabili, gli  $n$  gradi di libertà del sistema che evolvono nel tempo, le variabili  $x_1, \dots, x_n$ , possono essere pensate come le componenti di un vettore  $\mathbf{x}(t)$  a  $n$  dimensioni. Indicando con  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{x}'(t)$  le due traiettorie generate da due vettori di stato del sistema a partire dalle condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0)$  e  $\mathbf{x}'(0)$ , in un sistema caotico si ha:  $|\delta \mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t)| \sim \varepsilon e^{\lambda t}$ , dove  $\varepsilon$  è dato da  $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}'(0)|$  e  $\lambda$  dipende dal sistema ed è determinato dalla pendenza del grafico di  $\ln|\delta \mathbf{x}(t)|$  in funzione del tempo. Questa relazione permette di capire come anche una piccola incertezza  $\varepsilon$  sulla condizione iniziale si amplifichi molto velocemente. Tuttavia, nonostante il passaggio a un regime caotico, poiché il sistema è globalmente stabile, questo allontanamento tra le traiet-



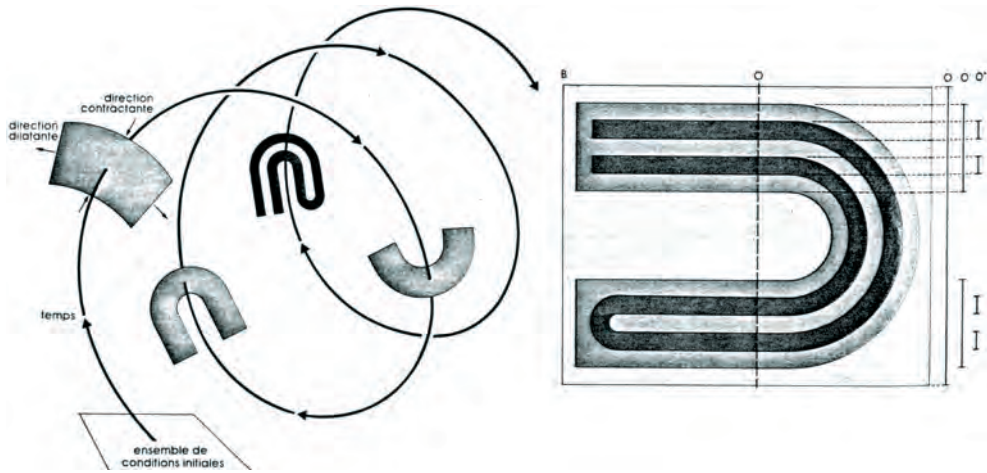


Figura 10. Per analizzare il processo attraverso cui si generano gli attrattori caotici, conviene ragionare in due dimensioni, considerando un piccolo rettangolo contenente un insieme di punti di partenza. Si supponga anche che nell'insieme le traiettorie si avvolgono su se stesse nel corso del tempo, vale a dire che l'evoluzione del sistema considerato sia dominata da una frequenza caratteristica. Per un sistema reale, dissipativo, tutte le traiettorie hanno la tendenza a finire su un attrattore. In questo modo il rettangolo si contrae lungo una direzione. Ma quando il sistema si evolve sotto l'effetto della sensibilità alle condizioni iniziali che tendono a separare le traiettorie vicine, nulla impedisce al rettangolo di aumentare esponenzialmente in un'altra direzione. Inoltre, poiché le grandezze fisiche che descrivono un sistema reale sono necessariamente limitate, le traiettorie devono restare necessariamente confinate entro certi limiti e l'attrattore deve necessariamente ripiegarsi su se stesso. Le tre operazioni di contrazione, stiramento e ripiegatura lo trasformano progressivamente in un ferro di cavallo che a sua volta viene stirato e ripiegato assumendo la forma di destra, una sorta di fermaglio metallico, e così via, finché si generano pieghe dentro le pieghe all'infinito. Una sezione trasversale mette in evidenza la struttura particolare che ne risulta: una struttura frattale che genera un numero sempre più grande di particolari via via che viene ingrandita.

torie non può che prodursi in una regione finita dello spazio delle fasi. Nel caso di un sistema caotico, appare quindi la necessità di una terza dimensione, in cui il flusso delle traiettorie nello spazio delle fasi ha la possibilità di ripiegarsi su se stesso e perfino di tornare nel quadrato originario senza che le traiettorie si intersechino l'una con l'altra. Questo non può accadere, perché significherebbe che il sistema può scegliere tra due evoluzioni, il che è contrario al determinismo. In tre dimensioni è quindi possibile costruire un attrattore che risulta sempre contenuto in un volume finito, e che contemporaneamente presenta una divergenza esponenziale di due traiettorie inizialmente vicine. La sensibilità alle condizioni iniziali induce uno stiramento delle traiettorie nello spazio delle fasi, ma il fatto che il sistema

sia dissipativo ha come conseguenza che questi stiramenti si combinano con delle ripiegature formando delle figure caratteristiche (Fig. 10).

Un sistema analogo al pendolo è rappresentato da una bussola, un ago che si muove senza attriti in un campo magnetico fisso, come quello terrestre (Fig. 11).

Le traiettorie dell'ago sono identiche a quelle del pendolo semplice. In entrambi i casi lo spazio delle fasi contiene traietto-

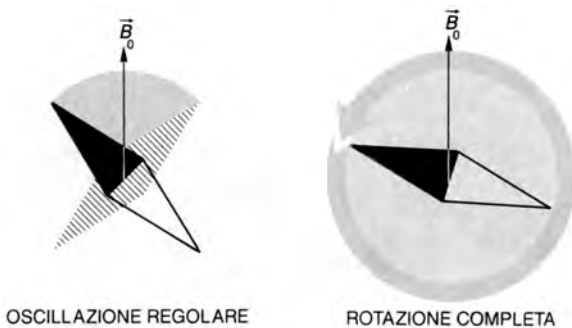


Figura 11. Ago senza attriti in un campo magnetico fisso.



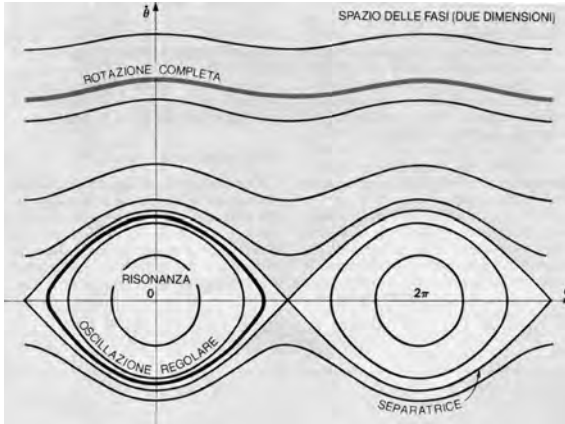


Figura 12. Spazio delle fasi in due dimensioni di un ago senza attriti in moto in un campo magnetico fisso.

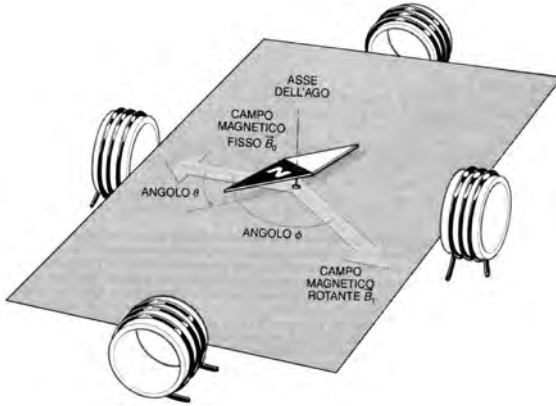


Figura 13. L'ago di una bussola posto all'interno di due campi magnetici, uno fisso e l'altro rotante, può avere un comportamento caotico, quando lo si avvia fissando le condizioni iniziali, pur essendo un sistema perfettamente deterministico.

(1937-2010) e Jürgen Kurt Moser (1928-1999)) e corrispondenti a moti regolari dell'ago; lo spazio delle fasi comporta inoltre traiettorie stocastiche corrispondenti a moti disordinati dell'ago e non avvolte su tori di KAM (Fig. 14).

L'introduzione di un campo magnetico rotante altera la semplice dinamica dell'ago magnetico in campo fisso. Per studiare la traiettoria di un sistema in uno spazio delle fasi a quattro dimensioni si può fare una intersezione con un piano opportunamente scelto. Nella sezione di Poincaré dello spazio delle fasi sono ancora visibili regioni interne che mostrano curve chiuse regolari, che rappresentano l'oscillazione avanti e indietro, ma in prossimità della separatrice, il moto diventa caotico e imprevedibile. I punti non formano una curva, come accade nelle regioni ordinate, ma si dispongono apparentemente a caso in una regione abbastanza ampia e si distribuiscono in modo aleatorio nelle sezioni di Poincaré. Ancora più all'esterno si distingue un altro fenomeno, la risonanza. I tori si raggruppano in due risonanze principali: la risonanza intorno al campo magnetico fisso (in basso), nella quale l'ago è "imprigionato" intorno a questo campo, e la risonanza intorno al campo magnetico rotante (in alto), dove l'ago oscilla intorno al campo magnetico rotante accompagnandolo nel suo moto di rotazione. Appaiono delle isole, che hanno una strut-

rie di due tipi: curve chiuse corrispondenti a oscillazioni dell'ago (o del pendolo) contenute in un dominio chiamato risonanza, la zona interna alla separatrice. Quando si fornisce all'ago energia sufficiente per effettuare rotazioni complete (verso orario o antiorario), le sue traiettorie nello spazio delle fasi sono curve aperte. Le separatrici corrispondono a moti dell'ago di energia appena sufficiente a permettergli di allinearsi nella direzione opposta a quella del campo magnetico fisso, una posizione di equilibrio instabile (Fig. 12)

Lo spazio delle fasi del sistema formato dall'ago rotante senza attriti in un campo magnetico fisso e in un campo magnetico rotante a velocità angolare costante (Fig. 13) ha invece quattro dimensioni: l'angolo tra la direzione dell'ago e il campo magnetico fisso, la velocità angolare dell'ago, l'angolo tra il campo magnetico rotante e il campo magnetico fisso e la velocità angolare del campo magnetico rotante.

Ci si può ricondurre a uno spazio delle fasi a tre dimensioni, dato che il campo magnetico ruota a velocità costante. Lo spazio delle fasi comporta così traiettorie regolari che si avvolgono su tori, detti tori di KAM (dalle iniziali dei nomi dei matematici Andrej Nicolaevic Kolmogorov (1903-1987), Vladimir Arnol'd

tura simile a quella centrale e intorno a ciascuna delle quali si trova una zona caotica, corrispondente alla separatrice del pendolo, dove il movimento è instabile e molto sensibile alle condizioni iniziali. Più lontano dal centro si trova una vasta zona caratterizzata da moto fortemente caotico (Fig. 15).

La congiunzione di due sistemi molto semplici, oscillatore smorzato e campo magnetico oscillante, conduce quindi all'imprevedibilità totale del comportamento dell'ago della bussola, che diviene rapidamente caotico. Questo tipo di sistema mostra la classica sensibilità alle condizioni iniziali, ciascuna condizione corrispondendo infatti a una curva chiusa o a un insieme caotico di punti nello spazio delle fasi.

**Il caos intorno a noi**

È noto che l'orientazione del campo magnetico terrestre si inverte nel corso dei millenni, senza alcuna regolarità e in una maniera molto casuale. Nel 1958, partendo da equazioni differenziali a tre variabili, Tsuneji Rikitake elaborò un modello per il funzionamento della dinamo terrestre che teneva conto del fatto che il nucleo può essere assimilato a un fluido conduttore in cui i gradienti di temperatura generano moti di convezione creando un campo magnetico autosostenuto. Il modello è fondato su tre variabili, accoppiate non linearmente: velocità angolare del fluido conduttore, intensità della corrente circolante nel fluido e induzione magnetica. Dopo integrazione delle equazioni, il modello mostra delle oscillazioni di intensità del campo magnetico e delle inversioni

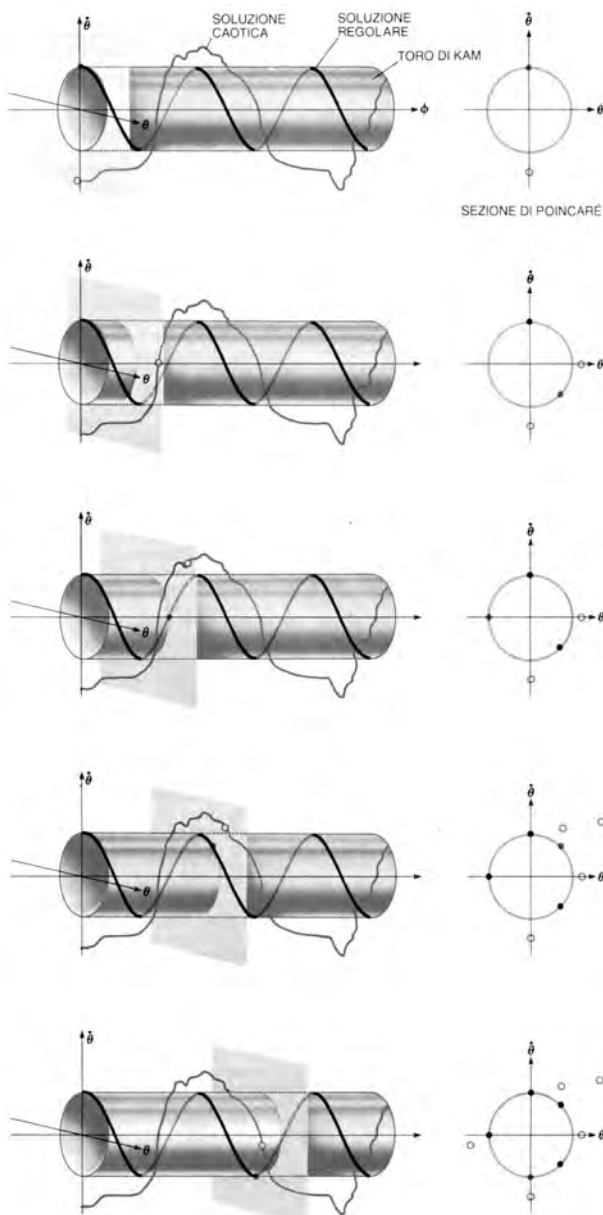


Figura 14. I tori di KAM rappresentano la riduzione in tre dimensioni ottenuta intersecando lo spazio delle fasi in quattro dimensioni con la superficie corrispondente alla velocità angolare costante del campo rotante. Per costruire le sezioni di Poincaré si portano sullo stesso piano (a destra) i punti che si trovano all'intersezione delle diverse traiettorie con piani di "taglio" spaziali di  $2\pi$  lungo l'asse  $\varphi$  (fase del campo rotante). Per le traiettorie regolari che si avvolgono a elica sui tori di KAM, ciascuna intersezione è un punto posto su una curva (in questo caso una circonferenza): la sovrapposizione dei piani di taglio costituisce la curva punto per punto. Le traiettorie stocastiche, invece, corrispondono a moti disordinati dell'ago; i punti all'intersezione tra i piani di taglio e queste traiettorie si distribuiscono in una regione che si trova all'esterno degli ultimi tori di KAM.

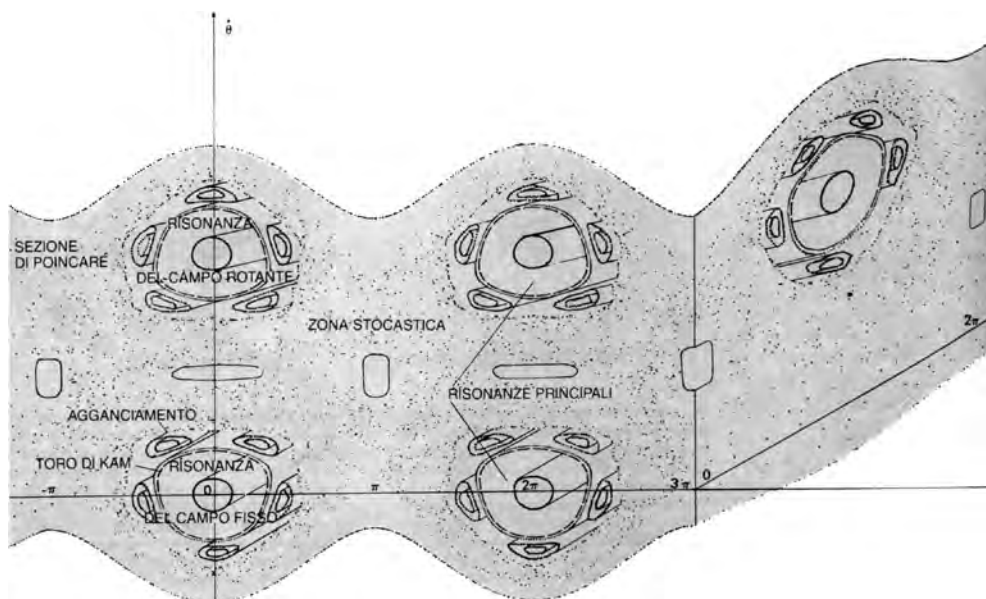


Figura 15. I tori di KAM posti al centro delle risonanze principali corrispondono a moti dell'ago composti da due frequenze fondamentali il cui rapporto è un numero irrazionale. La non integrabilità del problema fa sì che gli altri tori, associati a rapporti tra frequenze che sono numeri razionali, cedano il posto a zone stocastiche e ad incastri di piccoli tori eccentrici rispetto alle risonanze principali e costituiti dall'avvolgimento a elica di traiettorie regolari. I tori che avrebbero dovuto corrispondere alle separatrici delle risonanze (il confine dei domini in cui l'ago è imprigionato cioè costretto ad oscillare intorno a uno dei campi magnetici) sono scomparsi e sono stati sostituiti da zone stocastiche. Queste invadono lo spazio delle fasi quando si aumenta il parametro di stocasticità facendo variare l'ampiezza dei campi magnetici o la velocità angolare del campo magnetico rotante.

che si succedono in maniera molto erratica. Questo semplice modello fu uno dei primi a mettere in evidenza le oscillazioni caotiche e fornisce una discreta immagine delle inversioni del campo magnetico terrestre, se confrontato con i dati relativi all'orientazione del campo magnetico reale rivelati dall'analisi di antiche lave emesse da vulcani e da campioni prelevati dalle dorsali oceaniche.

Pur essendo rivoluzionario, all'epoca il modello restò confinato all'interno della comunità dei geofisici e non ebbe l'impatto del più celebre modello di Lorenz in meteorologia. Quest'ultimo ha giocato invece nel 1963 un ruolo importante nell'emergere della teoria del caos deterministico. Edward Lorenz, che si interessava molto al problema delle previsioni meteorologiche, costruì un modello molto semplice della convezione atmosferica che comprendeva tre variabili dinamiche. Integrando il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari, che rappresentavano un modello semplificato della convezione atmosferica:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -y - xz + rx \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy\end{aligned}$$

dove  $\sigma$  dipende dal tipo di fluido e  $b$  dipende dalla geometria, mentre il parametro  $r$  contiene il cosiddetto numero di Rayleigh, che fornisce il rapporto tra l'effetto di spinta nel fluido e quello dovuto alla viscosità e alla diffusione, Lorenz trovò che per certi valori di  $r$  si os-

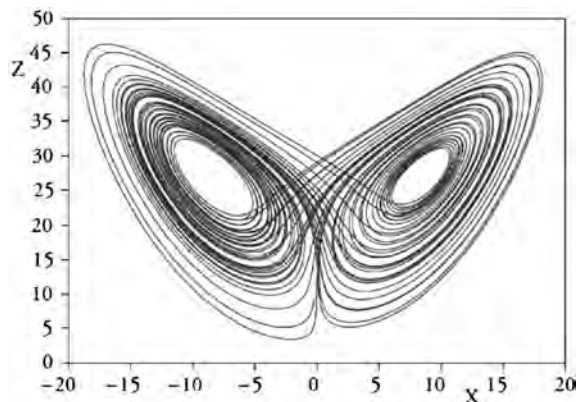


Figura 16. Proiezione sul piano (x,z) dell'evoluzione temporale del modello di Lorenz. La scoperta dell'attrattore di Lorenz nel 1963 ha segnato la nascita di una nuova era in cui gli scienziati hanno cominciato a prendere coscienza dell'importanza dei moti caotici.

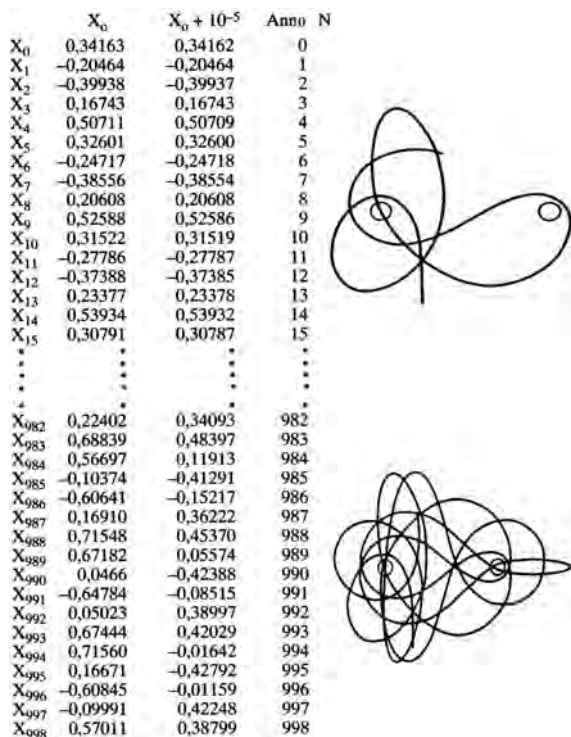


Figura 17. Modello semplificato del sistema Terra - Sole - Luna: dopo quindici passi, corrispondenti a 15 anni di evoluzione del sistema, lo scarto è aumentato, ma resta trascurabile. Il sistema appare abbastanza stabile e si possono fare previsioni ragionevoli su tale periodo di tempo. Dopo 1000 anni l'incertezza iniziale ha raggiunto un valore talmente considerevole da non consentire alcuna previsione su tempi di questo ordine di grandezza. A destra, complessità dell'orbita di un pianeta situato in un sistema solare dominato da due stelle di uguale massa. Il pianeta segue un'orbita complessa e imprevedibile, ben lontana dall'ellisse kepleriana.

servano comportamenti caotici. Nel corso di questo studio scopri la sensibilità alle condizioni iniziali. Utilizzando come nuove condizioni iniziali risultati intermedi ottenuti su un calcolo già effettuato, di cui voleva verificare l'andamento su tempi ancora più lunghi, per guadagnare tempo li reinserì nel calcolatore dopo averli arrotondati. Si accorse ben presto che il nuovo calcolo conduceva a dei valori molto diversi da quelli che aveva ottenuto precedentemente lasciando che il calcolatore effettuasse il calcolo globale in una unica sequenza. Comprese che proprio gli arrotondamenti, che si traducevano in una piccola differenza nelle condizioni iniziali, erano stati la causa delle differenze osservate. Nello spazio delle fasi a tre dimensioni, i punti che rappresentano l'evoluzione del sistema si collocano sull'oggetto rappresentato: l'attrattore strano del sistema. In meteorologia il sistema reale è molto più complesso del modello di Lorenz, ma presenta lo stesso tipo di comportamento. L'apparizione di attrattori strani nello spazio delle fasi a tre o più dimensioni può quindi essere considerato come rivelatrice del caos.

Nel titolo di un lavoro presentato da Lorenz durante il 139° incontro della *American Association for the Advancement of Science* del dicembre 1972 fece la sua prima apparizione la famosa metafora della farfalla: "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?". In quel discorso Lorenz sollevava una questione fondamentale: "La questione che realmente ci interessa è se [le farfalle] siano in grado di fare perfino questo - se, per esempio, due particolari situazioni meteorologiche che differiscono tra loro talmente poco, tanto quanto l'influenza esercitata da una singola farfalla, possano evolversi dopo un tempo sufficiente in due situazioni che differiscono tra loro tanto quanto la presenza di un tornado. In linguaggio più tecnico, il



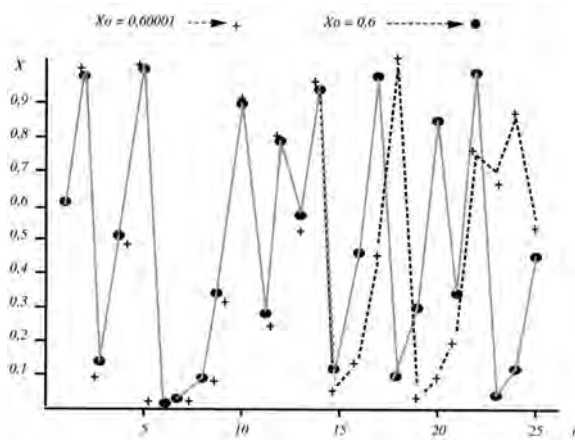


Figura 18. Evoluzione su 25 anni di una popolazione che segue l'equazione  $X_{n+1} = K X_n(1-X_n)$  per due valori iniziali che differiscono di un fattore  $10^{-5}$ .

torica tridimensionale è molto complicata, così la posizione viene calcolata a intervalli di tempo regolari (per esempio annuali). Per valutare la stabilità di questo sistema, si possono confrontare le traiettorie seguite dal satellite a partire da due posizioni iniziali che differiscono soltanto per la quinta cifra decimale ( $10^{-5}$ ). Si trova che dopo mille anni i risultati non hanno nessun punto in comune; la sensibilità alle condizioni iniziali ha trasformato il piccolo errore iniziale in un valore enorme. (Fig. 17).

Le conoscenze acquisite sui sistemi dinamici si applicano anche a numerosi fenomeni biologici, come i ritmi della veglia e del sonno, i ritmi interni del corpo umano in presenza di ritmi esterni che fungono da sistemi forzanti. Ormai il comportamento caotico è stato abbondantemente riscontrato in innumerevoli sistemi fisici come il laser, i semiconduttori, i plasmi, le macchine acceleratrici, i circuiti elettrici non lineari, i sistemi acustici. Il caos è presente in numerosi altri domini come le scienze della Terra e dello spazio, la dinamica degli oceani, il clima, lo studio delle macchie solari e le scienze della vita in genere, come la dinamica delle popolazioni animali.

Il modello di crescita delle popolazioni animali è descritto da una ben nota e molto semplice equazione che lega  $X_{n+1}$ , la popolazione nell'anno  $n+1$ , a  $X_n$ , la popolazione dell'anno precedente  $n$ :

$$X_{n+1} = K X_n(1-X_n).$$

Il termine  $(1-X_n)$  traduce l'effetto di regolazione dovuto all'esaurimento delle scorte alimentari, i predatori, ecc. senza il quale la popolazione crescerebbe esponenzialmente secondo uno schema del tutto irrealistico. La figura mostra l'evoluzione su 25 anni calcolata a partire da una popolazione iniziale  $X_0 = 0.6$  per un fissato  $K$ . Se si calcola l'evoluzione sullo stesso periodo introducendo uno scarto di  $10^{-5}$  sulla popolazione iniziale ( $X_0 = 0.60001$ ) si ottiene la curva tratteggiata (Fig. 18).

In medicina e in fisiologia il comportamento caotico si manifesta non soltanto nelle tracce degli elettroencefalogrammi e dei ritmi cardiaci, ma anche nelle variazioni della pressione sanguigna o della concentrazione di ormoni. Questo accade sorprendentemente in soggetti sani: il caos sarebbe forse la regola, piuttosto che una eccezione?

### Caos nel sistema solare

L'interazione gravitazionale fra tre corpi implica instabilità; a maggior ragione l'intero sistema solare dovrebbe presentare delle instabilità più importanti a causa del gran nu-

comportamento dell'atmosfera è *instabile* rispetto a perturbazioni di piccola ampiezza?"

L'avvento di computer sempre più potenti è stato uno strumento determinante per lo studio dei fenomeni caotici. Senza il computer, lo studio dei sistemi dinamici non si sarebbe mai sviluppato ai livelli attuali. Sempre all'inizio degli anni Sessanta, un astronomo francese, Michel Henon introdusse un modello dei tre corpi che costituisce una semplificazione del caso Sole - Terra - Luna in cui si suppone che due siano della stessa massa (e ruotano quindi uno intorno all'altro), mentre il terzo, il satellite, è soggetto all'azione degli altri due. La sua traiet-

mero di corpi che interagiscono. Come aveva ben compreso Poincaré, il caos e l'ordine, la stabilità e l'instabilità, sono strettamente connessi al fenomeno della "risonanza", che pervade l'intero sistema solare. Il fenomeno si ha quando due periodi orbitali sono legati da un rapporto frazionario semplice che conduce a configurazioni che si ripetono nel tempo. La risonanza può avvenire, p. es., tra il moto di rotazione e il moto di rivoluzione, come nel caso di Mercurio che è bloccato su una risonanza spin-orbita del tipo 3:2. Un esempio ovvio è la nostra Luna, che ha una rotazione in sincronia con la rivoluzione grazie alla risonanza spin-orbita 1:1 che la obbliga a mantenere sempre la stessa faccia verso la Terra. I satelliti naturali nel sistema solare si trovano in situazioni analoghe, sebbene questo sia uno stato a cui sono pervenuti su tempi lunghissimi grazie agli effetti di marea creati dalla combinazione dei due moti. La risonanza può essere di tipo stabile o instabile. Consideriamo il caso degli asteroidi, i pianetini che orbitano tra Marte e Giove, in una regione centrata intorno a circa 2.9 Unità Astronomiche; se ne conoscono più di 30000, ma il loro numero potrebbe essere dell'ordine dei 100000, con dimensioni variabili da qualche chilometro a centinaia di chilometri. Il più grande è Cerere, scoperto da Giuseppe Piazzi nel 1801, che ha dimensioni dell'ordine di 1000 chilometri. Se la congiunzione con un altro corpo avviene quando l'asteroide è in afelio rispetto al Sole e quindi più soggetto all'influenza di Giove, di gran lunga il più massiccio dei pianeti, si determina una situazione che provoca ripetutamente una configurazione instabile. Tra gli anni Cinquanta e l'inizio degli anni Sessanta importanti progressi riguardanti questi problemi furono ottenuti da Kolmogorov, Arnold e Moser, a cui si deve un teorema piuttosto complesso che riguarda l'esistenza di moti quasi-periodici a causa di piccole perturbazioni di tipo non lineare. Se si esamina il semplice esempio di un sistema a tre corpi del tipo Sole - Terra - Luna, il teorema afferma che, se nelle condizioni iniziali il rapporto tra il periodo  $T_L$  della Luna che gira intorno alla Terra e quello della Terra intorno al Sole è un numero irrazionale, vale a dire se  $T_L/T_T \neq p/q$  con  $p$  e  $q$  interi, allora il sistema è stabile. Al contrario, se questo rapporto (e più in generale il rapporto tra periodo di un corpo e quello perturbato) è razionale ( $= p/q$ ), allora compaiono le instabilità.

I periodi di rivoluzione degli asteroidi dipendono dalla loro distanza dal Sole, secondo la terza legge di Keplero. L'esame dettagliato della ripartizione degli asteroidi nella cintura mostra che esistono delle lacune, notate per la prima volta nel 1857 dall'astronomo americano Daniel Kirkwood (Fig. 19). In corrispondenza di certi valori del semiasse maggiore ci sono pochissimi asteroidi, o addirittura mancano del tutto, mentre per altri valori sono molto numerosi, come nel caso corrispondente alla risonanza 3:2 con Giove: il gruppo Hilda contiene 230 oggetti con diametro superiore a 100 km. Un caso particolare è rappresentato dagli asteroidi Troiani, che si trovano sui famosi punti di Lagrange, da una parte e dall'altra di Giove. Queste posizioni rappresentano una zona di stabilità gravitazionale che riunisce più di 2500 oggetti individuati fino ad ora, di cui alcuni hanno più di 15 km di diametro. Una simulazione ha mostrato come queste trappole gravitazionali esistano anche intorno a Marte, Venere e alla Terra. Nel caso delle lacune, Kirkwood spiegò come l'origine fosse da collegare con le risonanze orbitali con il pianeta Giove. Le più importanti sono la 3:1, la 5:2 e la 7:3 e la 2:1.

Ci si può rendere conto infatti che i valori del semiasse per i quali appare una lacuna sono quelli che corrispondono a periodi orbitali che sarebbero legati da un rapporto semplice con il periodo di Giove come mostra la rappresentazione del numero di asteroidi in funzione del rapporto  $T_{\text{Asteroide}}/T_{\text{Giove}}$ . Gli astronomi proposero diverse teorie, tra cui quella che le collisioni ripetute in corrispondenza delle risonanze avevano causato la produzione di oggetti troppo piccoli per essere osservati. Era chiaro che il problema riguardava la dinamica dei tre corpi Sole - Giove - Asteroide, ma mancava un meccanismo che potesse rimuovere gli asteroidi dalle risonanze.

A partire dagli anni Cinquanta, alle orbite planetarie calcolate dagli instancabili meccanici celesti come Le Verrier, si cominciarono a sostituire orbite calcolate con i computer. All'inizio sembrava solo questione di velocità: giorni - o anche solo ore - anziché anni



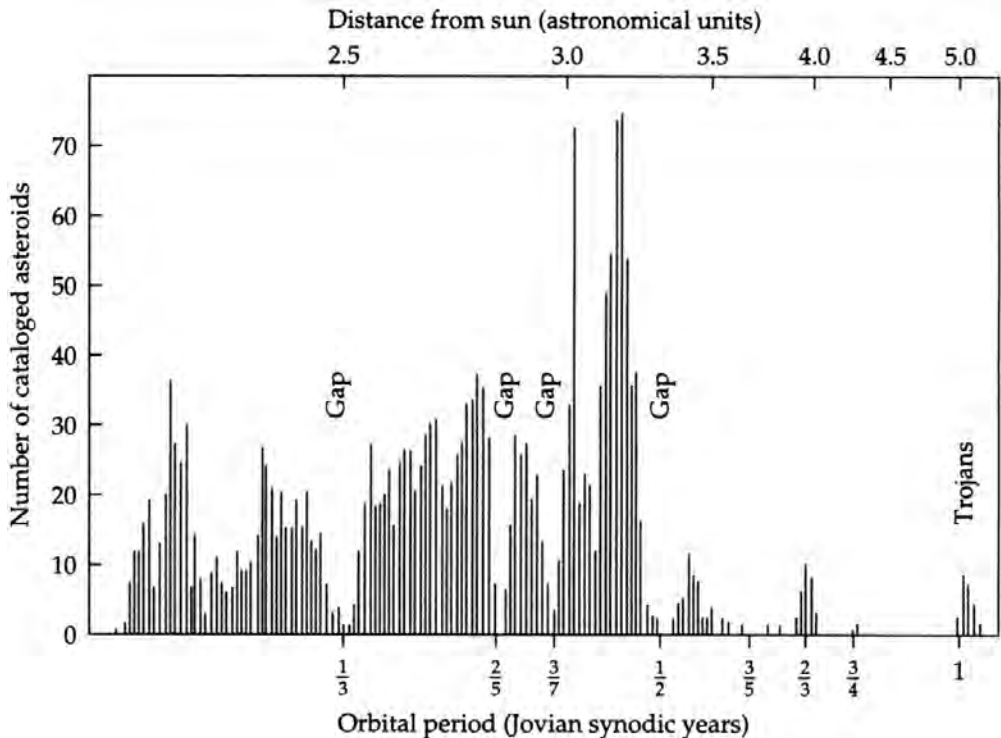


Figura 19. Lacune di Kirkwood. Ripartizione della popolazione di asteroidi a varie distanze dal Sole in funzione del rapporto  $T_{\text{Asteroide}}/T_{\text{Giove}}$ .

di calcoli. Ma cercando di tracciare sequenze di punti che descrivono il comportamento di una particolare soluzione di un problema dinamico per un tempo piuttosto lungo, si cominciò a trovare che alcune delle curve invarianti, che si ottengono per ogni scelta delle condizioni iniziali, si dissolvono lasciando comparire moti caotici. Lo studio del caos ha avuto una svolta gigantesca con l'uso dei computer. Un balzo enorme dai tempi dell'antico e sofisticato meccanismo di Antikythera, un vero precursore dei computer, utilizzato dai Greci intorno al 65 a.C. per fare previsioni sul moto del Sole e della Luna. Nel 1954 Kolmogorov trovò che in alcuni casi esistono effettivamente delle curve su cui i punti sembrano disporsi come negli esperimenti al calcolatore. Si tratta effettivamente di una proprietà reale delle soluzioni le cui condizioni iniziali giacciono in una di queste regioni ordinate. Divenne evidente come nello spazio delle fasi in cui venivano graficate le posizioni e le velocità degli asteroidi e dei pianeti, si osservavano regioni di comportamento regolare, prevedibile, e regioni caotiche, di comportamento non prevedibile. Per alcune combinazioni delle condizioni iniziali (posizioni e velocità) il futuro appariva chiaro, per altre rimaneva nebuloso. In questo spazio astratto, le risonanze apparivano spesso come piccole isole di apparente stabilità circondate da zone di caos.

Una svolta nelle indagini sull'origine delle lacune di Kirkwood venne dalla collaborazione tra Gerald J. Sussman, un esperto di intelligenza artificiale, e Jack Wisdom, planetologo, che all'inizio degli anni Ottanta del Novecento sfruttarono le possibilità offerte da un supercomputer (il *Digital Orrery*, un vero e proprio planetario digitale ottenuto collegando tra loro 10 computer). Simulazioni già effettuate negli anni Settanta su durate dell'ordine di centinaia di migliaia di anni, non avevano portato a risultati significativi. Ma grazie a un metodo scoperto nell'ambito degli studi sulla dinamica degli acceleratori di particelle, Wisdom riuscì a modellizzare l'azione di Giove sotto forma di "impulsi" appli-

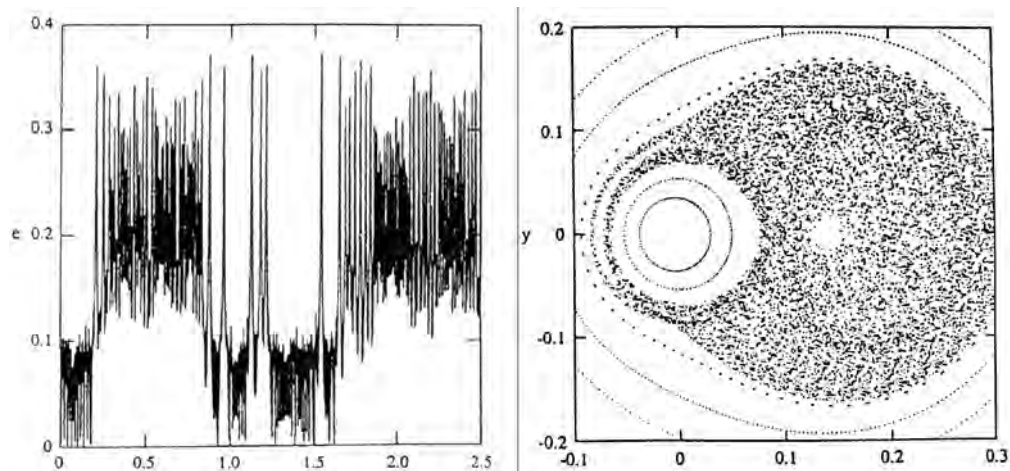


Figura 20. Eccentricità di una tipica traiettoria caotica di un asteroide situato nella lacuna 3:1 calcolata su un intervallo di tempo corrispondente a milioni di anni. Esplosioni di comportamento ad alta eccentricità sono intervallati con periodi caratterizzati da bassa eccentricità, interrotti da picchi occasionali. La sezione dello spazio delle fasi corrispondente alla traiettoria della simulazione numerica mostra che la traiettoria è libera di esplorare una zona caotica piuttosto ampia. L'esistenza di questi sbalzi di eccentricità è dovuta alla forma della zona caotica nella quale si trova l'orbita: quando l'orbita resta nella parte principale della zona centrata intorno all'origine, l'eccentricità resta moderata. Ma ogni tanto la traiettoria trova un ingresso verso il ramo sottile della zona caotica che le consente di andare ad esplorare zone di elevata eccentricità (Wisdom 1987, p. 259-261).

cati a intervalli regolari, il cui effetto era valutabile analiticamente. In questo modo era possibile calcolare molto rapidamente un'orbita iterando una applicazione di questo tipo nell'ambito dei metodi standard utilizzati fino ad allora. Una simulazione numerica di questo modello applicato all'evoluzione di un asteroide situato nella lacuna 3:1 nella fascia degli asteroidi su un intervallo di tempo di vari milioni di anni mise in evidenza forti sbalzi intermittenti di eccentricità (Fig. 20). Questi picchi sono importanti per la formazione del gap, perché in quella zona eccentricità al di sopra di 0.3 portano ad incrociare l'orbita di Marte (le eccentricità dei pianeti interni hanno in genere valori piuttosto inferiori, che vanno da 0.06 a 0.2). In queste condizioni, l'asteroide può trovarsi quindi a tagliare l'orbita di Marte e verrà così espulso dalla sua orbita in occasione di un incontro ravvicinato con il pianeta. Una grossolana stima dei tempi indica che è necessario un lasso di tempo dell'ordine dell'età del sistema solare (Wisdom 1980, 1983). Questo era il meccanismo che gli astronomi stavano cercando.

Esiste una zona caotica che circonda l'origine ed ha un ramo molto stretto che si estende a eccentricità vicine a 0.3. Quando l'orbita resta nella parte principale della zona centrata sull'origine, l'eccentricità resta moderata. Ma di tanto in tanto la traiettoria, nel vagare nella zona caotica che circonda l'origine, entra nello stretto passaggio verso le grandi eccentricità, toccando anche valori vicini a 0.4. Come mostra la simulazione, l'eccentricità può infatti variare enormemente ad intervalli irregolari, creando così le condizioni per una possibile interazione gravitazionale con Marte che può far balzare l'asteroide fuori dalla sua orbita (Fig. 20).

Le figure generate dalle simulazioni sono state determinanti nel mettere in evidenza che il comportamento caotico ha giocato un ruolo importante nella formazione del gap 3:1 nella fascia degli asteroidi. È chiaro che ogni volta che il rapporto tra i periodi di Giove e dell'asteroide si avvicina a un numero razionale semplice, la traiettoria dell'asteroide è instabile e caotica e prima o poi viene espulso da quell'orbita lasciando una lacuna. L'effetto di tali risonanze è infatti quello di modificare gli elementi orbitali dell'asteroide, in particolare il semiasse maggiore. In ogni caso tutte le traiettorie caotiche attraversano l'orbita di Marte. Appare anche che le discontinuità multiple osservate negli anelli di Satur-

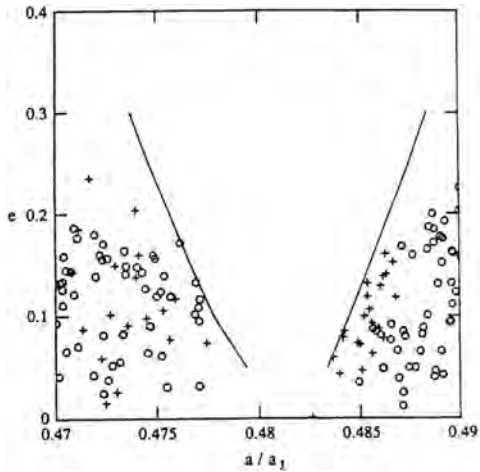


Figura 21. Confronto tra la distribuzione effettiva di asteroidi con le frontiere esterne alla zona caotica 3:1. In teoria la regione compresa fra le due linee non dovrebbe contenere asteroidi. Pallini e croci, che rappresentano i valori osservati relativi alla distribuzione di due diversi tipi di asteroidi presenti nella zona esterna alla fascia, confermano questa previsione (Wisdom 1987).

la forma altamente irregolare. Prima dell'incontro dei Voyager con Saturno, ci si chiedeva se Iperione fosse dotato di un moto di rotazione sincrono del tipo 1:1, visto che è piuttosto piccolo ed uno dei più distanti tra le lune di Saturno.

Le osservazioni di Voyager 2, e quelle di sonde successive non soltanto hanno rivelato un oggetto a forma di patata, ma hanno misurato un periodo di rotazione di 13 giorni, mentre il periodo orbitale è di 21, così che Iperione non si trova in una risonanza spin-orbita, come nel caso familiare della nostra Luna. Il suo moto di rotazione, oltre a non essere sincronizzato, non è nemmeno regolare e mostra segni evidenti di caos. Il suo asse di rotazione non è fisso e il satellite fa capriole nello spazio oltre a ruotare su se stesso caoticamente. Sia la direzione dell'asse di rotazione, sia la velocità angolare fluttuano in maniera aleatoria su una scala temporale di pochi periodi orbitali (21 giorni). Ma la storia caotica di Iperione non finisce qui. In circostanze normali l'orbita diventerebbe più circolare e il moto caotico tenderebbe a scomparire, ma Iperione è incatenato a un'orbita apparentemente stabile caratterizzata da una risonanza orbita-orbita 4:3 con Titano (ogni quattro rivoluzioni di Titano intorno a Saturno se ne hanno tre di Iperione), la più grande delle lune di Saturno. Nel complesso, l'attrazione di Titano fa sempre in modo che la congiunzione si sposti verso una certa determinata posizione, coincidente con l'apocentro dell'orbita di Iperione, e una conseguenza importante di ciò è che la risonanza tende a persistere indefinitamente, pur costringendo Iperione su un'orbita eccentrica piuttosto che circolare. Se la massa di Titano fosse nulla, Iperione seguirebbe le leggi di Keplero nel suo moto attorno a Saturno; se nelle simulazioni si fa crescere la massa di Titano, esse mostrano che Iperione si comporta in modo sempre più strano. Iperione è sull'orlo del caos: l'orbita di rivoluzione nel complesso è regolare, ma se si assume che il moto di Iperione si svolga sotto la sola attrazione di Saturno e Titano (quest'ultimo in orbita circolare attorno a Saturno) e si fanno i disegni nel piano delle sequenze di punti che rappresentano le possibili orbite di Iperione, si scopre che per alcune condizioni iniziali, compresa quella che corrisponde al vero Iperione, il moto è regolare; per condizioni iniziali diverse, ma non di molto, il moto è caotico.

I tempi in cui il caos si manifesta sono molto lunghi e quindi non è possibile osservare direttamente un comportamento irregolare nel moto di Iperione, tuttavia una confer-

no possano avere la stessa origine; le perturbazioni periodiche in questo caso essendo da ricercare al livello stesso dei satelliti di Saturno.

Il problema delle risonanze rivela tutta la sua complessità poiché, vicino quanto si vuole a un razionale, si trova sempre un irrazionale, e viceversa. Così si dovrebbe osservare, a qualsiasi scala, un incastrarsi di orbite stabili e instabili. Soprattutto a partire dagli anni Ottanta, progetti che utilizzavano supercomputer per integrare le orbite dei pianeti su centinaia di milioni di anni hanno rivelato la presenza di caos, come nel caso di Plutone, che si trova in risonanza con Nettuno. Uno degli esempi più eclatanti fu verificato dalla sonda spaziale Voyager 2, una delle prime ad esplorare il sistema solare dopo il lancio avvenuto nell'agosto del 1977, a distanza brevissima dalla sua gemella Voyager 1. Nel 1981 Voyager 2 inviò a Terra le prime immagini di Iperione, un asteroide scoperto nel 1848, che ne rivelarono

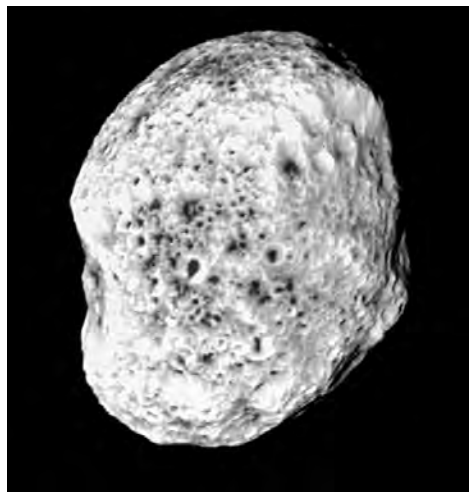


Figura 22. Incontro ravvicinato con Iperione, fotografato dalla sonda Cassini il 10 giugno 2005. Le sue insolite dimensioni sono 328x260x214 km (NASA, <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA06245>).

ma indiretta è stata fornita dalle immagini inviate dalla sonda Voyager. In presenza di caos, eventuali frammenti staccatisi da Iperione (per es. in seguito a urti con altri frammenti oppure per effetti di marea) a causa della forte dipendenza dalle condizioni iniziali finirebbero per avere un moto che rientra nella vasta regione caotica che si trova intorno alla risonanza 4:3. Venendo a mancare il meccanismo di “protezione” garantito dalla risonanza, dovrebbero allontanarsi velocemente, disperdendosi nello spazio; quindi è naturale attendersi che Iperione sia di forma molto irregolare. Infatti, quello che il Voyager ha fotografato è proprio un corpo con l’aspetto di una patata bitorzolosa in luogo dell’usuale sferoide. Eventuali corpi che si trovassero in orbite di poco diverse da quella su cui si trova Iperione, sarebbero presto spazzati via da incontri ravvicinati con Titano, o addirittura cadrebbero su Titano. Per questo motivo Iperione resta di forma irregolare. La possibilità che l’or-

bita del satellite raggiunga una delle piccole isole di stabilità presenti nella zona caotica è minima.

Ormai è evidente che il comportamento caotico esiste in situazioni diverse che coinvolgono a varie scale tutti i corpi del sistema solare. In parallelo, il problema della stabilità del sistema solare nel suo insieme è stata oggetto di lavori molto approfonditi, in particolare da parte di Jacques Laskar, che nei tardi anni Ottanta pubblicò i risultati di una simulazione numerica su circa 200 milioni di anni, in cui utilizzava una espressione che conteneva 150000 termini e che descriveva il comportamento medio dei pianeti nelle loro orbite intorno al Sole (Laskar e Froeschlé 1991). Il suo lavoro mostrò che l’orbita terrestre (così come tutte quelle dei pianeti interni) è caotica e che un errore di soli 15 metri sulla posizione misurata oggi renderebbe impossibile prevedere la posizione della Terra sulla sua orbita oltre un periodo di 100 milioni di anni. Su durate superiori a decine di milioni di anni, le simulazioni mettono in evidenza il carattere caotico del moto della Terra e di Marte. Una simulazione recentissima (Laskar e Gastineau 2009), effettuata su 2500 possibili futuri con condizioni iniziali leggermente differenti, dischiude panorami inquietanti per il futuro del sistema solare. Ha mostrato, per esempio, che Mercurio può variare la sua posizione di circa un metro tra una simulazione e l’altra. In 20 casi Mercurio va in un’orbita critica che lo porta in collisione con Venere o con il Sole e naturalmente nel corso di questo girovagare rischia di spostare gli altri pianeti dalle loro orbite. La simulazione mette in evidenza l’esistenza di possibili irregolarità nei moti dei pianeti interni, in particolare di traiettorie collisionali. A causa delle perturbazioni le orbite precedono e sono deformate, anche i piani orbitali precedono, e le inclinazioni cambiano lentamente. Nulla di speciale accade nel corso di milioni di anni, ma dopo diversi miliardi di anni esiste una piccola probabilità che il diffondersi delle orbite in zone caotiche possa destabilizzarle rendendo possibile le collisioni tra Mercurio e Venere, Marte e la Terra e perfino tra Venere e la Terra!

Molti hanno parlato della teoria del caos come di una “nuova scienza”, ma probabilmente questo insieme di metodi e idee costituisce nel suo complesso semplicemente un nuovo e potente strumento di indagine sui sistemi dinamici, che crea nuove relazioni tra matematica e fisica. Come osservava Poincaré nel 1905 (*La valeur de la science*, Paris, E. Flammarion, 1914): “Il matematico non dovrebbe essere per il fisico un puro fornitore di

formule; ci dovrebbe essere tra loro una collaborazione più intima. La fisica matematica e l'analisi pura non sono semplicemente domini adiacenti, che mantengono relazioni di buon vicinato, si compenetrano vicendevolmente e condividono lo stesso spirito". A più di 300 anni dalla pubblicazione dei *Principia* di Newton, il caos ci sta obbligando a lottare per indagare ancora più a fondo su tutte le implicazioni della legge di gravitazione universale, sul suo maestoso quanto semplice andare con l'inverso del quadrato della distanza. Perfino l'interrogativo posto dal leopardiano pastore errante dell'Asia riguardo la Luna ("Ancor non sei tu paga/Di riandare i sempiterni calli?") ci appare sotto una luce nuova. Sappiamo ormai che nell'estenderlo a molti altri corpi del nostro sistema solare, possiamo trovare risposte assai inquietanti. Fortunatamente la scala dei tempi coinvolti sfugge completamente alla attuale percezione umana.

## Bibliografia

- G. CASATI (a cura di), "Il Caos. Le leggi del disordine" (*Le Scienze*, 1991); fonte delle Fig. 5, 6, 12, 13, 14, 15.
- H. POINCARÉ, *Geometria e caso. Scritti di matematica e fisica* (a cura di C. Bartocci, Bollati Boringhieri 1995).
- D. RUELLE, *Caso e caos* (Bollati Boringhieri 1986).
- I. STEWART, *Dio gioca a dadi?* (Bollati Boringhieri 1989).
- H. POINCARÉ, *Science et méthode* (1908), Edizione italiana: Torino, Einaudi, 1997, a cura di C. Bartocci.
- I. EKELAND, *A caso. La sorte, la scienza, il mondo* (Bollati Boringhieri 1992).
- J. GLEICK, *Caos. La nascita di una nuova scienza* (Sansoni 1997).
- A. VULPIANI, *Determinismo e caos* (Carocci 2004).
- G.I. BISCHI *et al.*, *Sulle orme del caos, comportamenti complessi in modelli matematici semplici* (Bruno Mondadori 2004).
- I. EKELAND, *Come funziona il caos. Dal moto dei pianeti all'effetto farfalla* (Bollati Boringhieri 2010).
- A. MILANI, "Il moto dei pianeti: ordine o caos?", *L'astronomia* **65** (1991) p. 35.
- P. HOLMES, "Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and 'chaos'", *Physics Reports* **193** (1990) p. 137.
- I. PETERSON, *Newtons's Clock. Chaos in the solar system* (W. H. Freeman 1993).
- J. LASKAR e C. FROESCHLÉ, "Le chaos dans le système solaire", *La Recherche* **232** (22) (maggio 1991) p. 572.
- J. WISDOM, "The origin of the Kirkwood Gaps: A mapping for Asteroidal Motion near the 3/1 commensurability", *Astron. J.* **87** (1980) p. 557.
- J. WISDOM, "Chaotic Behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap", *Icarus* **56** (1983) p. 51.
- J. WISDOM, "Urey Prize Lecture: Chaotic Dynamics in the Solar System", *Icarus* **72** (1987) p. 241.
- J. LASKAR e M. GASTINEAU, "Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth", *Nature* **459** (11 giugno 2009) p. 817.

Per i contributi di **Giuseppe Giuliani**, si veda:

*Il ruolo dei potenziali nell'elettromagnetismo (e oltre)*

<http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/vp.asp>

*La fisica dà i numeri: il numero due della legge di Coulomb*

<http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/glossario.asp>