**Luisa Bonolis**
*Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin*
*AIF, Gruppo di Storia della Fisica*

# Simmetrie e principi di invarianza in fisica. Il ruolo della teoria dei gruppi

*Nel mio lavoro ho sempre cercato di unire verità e bellezza e quando ho dovuto scegliere tra l'una e l'altra, generalmente ho scelto la bellezza.*

Hermann Weyl

*La semplicità delle leggi naturali scaturisce dalla complessità del linguaggio che utilizziamo per esprimerle*

Eugene P. Wigner

## 1. Introduzione

Simmetria. Nell'immaginario collettivo è sinonimo di bellezza che deriva dall'armonia delle proporzioni. "Attraverso la simmetria l'uomo ha cercato di percepire e creare ordine, bellezza e perfezione", ha efficacemente commentato Hermann Weyl (1885-1955), che nel suo affascinante libro *La Simmetria*, parte proprio dalla nozione di simmetria come armonia delle proporzioni [1].

La simmetria ha sempre affascinato l'umanità, e d'altra parte è impossibile ignorarne le innumerevoli manifestazioni nel mondo fisico e nel mondo naturale. I greci ne erano ossessionati e cercarono di comprendere i cieli in termini degli oggetti più simmetrici che esistano: le sfere e i cerchi. Il termine συμμετρια deriva appunto da συν (con, insieme) e μετρον (misura) e originariamente stava ad indicare una relazione di commensurabilità, un concetto basilare negli *Elementi* di Euclide. La disposizione di parti identiche, disposte in un modo simile in un insieme, fornisce una armonia risultante da certe combinazioni e proporzioni regolari. Questa idea di simmetria è ancorata nel profondo dello spirito umano, e si ritrova in tutti i domini dell'arte: la pittura, la scultura, l'architettura, l'urbanistica, la musica, la poesia, le arti decorative [2].

Fin dall'inizio, quindi, la simmetria è stata strettamente legata all'armonia, alla bellezza, e all'unità, aspetti decisivi per il suo ruolo nelle teorie della natura. Nel tempo ha acquisito un significato più ampio, legato ad una relazione di proporzione, fondata sui numeri (interi), e con la funzione di armonizzare i differenti elementi in un insieme unitario, ma un gusto estetico ha comunque caratterizzato l'introduzione della simmetria nella comprensione del mondo, o, in modo più generale, nelle regolarità che formano l'essenza della nozione di legge fisica. Nel *Timeo* di Platone, per esempio, i poliedri regolari hanno un ruolo centrale nella dottrina degli elementi naturali, per le proporzioni di cui sono dotati e per la bellezza delle loro forme: il fuoco (tetraedro regolare), la terra (cubo), l'aria (ottaedro regolare), l'acqua (icosaedro regolare). Il dodecaedro è associato all'intero Universo. L'antica idea degli elementi primari si ritrova anche nella millenaria civiltà cinese, secondo cui il mondo era ugualmente composto da cinque elementi: oro, legno, acqua, fuoco e terra, che risultavano associati ai pianeti: Venere (oro), Giove (legno), Mercurio (acqua), Marte (fuoco) e naturalmente la Terra. Tutto questo testimonia la diffusione nelle culture antiche dell'antichissimo legame tra fisica, astronomia e cosmologia sotto il segno unificatore delle simmetrie geometriche.

Il permanere del concetto di "armonia delle sfere" dominò l'astronomia per almeno 1500 anni. Ancora nel 1596 Kepler (1571-1630), nel suo *Mysterium cosmographicum,* basava la sua architettura del sistema planetario sui cinque solidi regolari. La sua successiva scoperta delle tre famose leggi, che portano il suo nome, fu in ogni caso la conseguenza dei suoi primi tentativi di inquadrare il sistema solare all'interno di leggi semplici e armoniose: spiegare le regolarità del mondo fisico attraverso regolarità matematiche risultanti da considerazioni di simmetria.

La natura è ricca di esempi di forme simmetriche, tuttavia la semplice osservazione della comparsa di manifestazioni di simmetria non è in grado di costituire la base di un tentativo di spiegazione dei fenomeni, con l'eccezione notevole delle teorie cosmogoniche precedentemente ricordate: la teoria degli elementi di Platone e il sistema del mondo di Kepler, fondate entrambi sui poliedri regolari dello spazio a tre dimensioni, i famosi *solidi platonici*. Ma queste teorie, pur magnifiche, presentavano dei notevoli elementi di debolezza. La teoria di Platone era puramente metaforica e non poteva essere considerata come una vera e propria spiegazione scientifica (seppure parziale) delle proprietà degli *elementi*. Quanto alla teoria di Kepler, che collocava i pianeti conosciuti all'epoca all'interno dei cinque poliedri regolari, avrebbe potuto, in linea di principio, scoprire qualche nuova proprietà dello spazio, della materia o della gravitazione. Ma non è stato così; inoltre, il vantaggio che sarebbe potuto derivare dal fatto che limitava il numero dei pianeti, si è ritorto alla fine contro la teoria stessa, che veniva a trovarsi alla mercé della possibile scoperta di nuovi pianeti, come poi effettivamente avvenne.

Le figure regolari usate nella fisica di Platone e di Kepler per le proporzioni matematiche e le armonie che essi contengono (accanto alle corrispondenti proprietà e alla bellezza delle loro forme) sono simmetriche in un altro senso, non correlato alle proporzioni. Nel linguaggio della scienza moderna, la simmetria delle figure geometriche viene definita in termini della loro *invarianza* sotto uno specifico gruppo di rotazioni e riflessioni. Questo tipo di definizione deriva da una nozione più generale di simmetria che lentamente è emersa nell'era moderna, basata non più sulle proporzioni, ma su una relazione di uguaglianza tra elementi diversi in una figura. In generale, il concetto di uguaglianza delle parti rispetto all'insieme, inteso come intercambiabilità tra parti uguali, che possono essere scambiate l'una con l'altra preservando l'insieme, può essere codificato in specifiche operazioni matematiche, come le riflessioni, le rotazioni, e le traslazioni, che consentono di descrivere con precisione come le parti devono essere scambiate tra loro. Il risultato è una definizione della simmetria di una figura geometrica in termini della sua invarianza, rispetto allo scambio tra parti regolato da ciascuna specifica operazione. Così, quando le due metà di una figura a simmetria bilaterale vengono scambiate per riflessione, la figura originale resta immutata e tale figura si dice invariante per riflessione tra destra e sinistra.

Questi concetti furono sviluppati e applicati in maniera rigorosa nell'ambito della cristallografia. Gli oggetti naturali che esibiscono in modo più evidente proprietà di simmetria sono infatti i cristalli, così non sorprende il fatto che lo studio sistematico di tutte le possibili configurazioni simmetriche – la cosiddetta teoria della simmetria – sia connesso proprio con la nascita di questa scienza. Ciò che costituì una fondamentale debolezza della cosmogonia di Kepler (da non confondere con le sue celebri leggi legate al moto dei pianeti) rappresentò al contrario la grandezza della cristallografia, che riuscì a far trionfare le leggi della simmetria in fisica. Come nel sistema del mondo di Kepler, le leggi di simmetria dei cristalli limitano *a priori* il numero delle forme cristalline possibili; ma questa volta l'esperienza confermò completamente la previsione e tutti i cristalli rientrarono nella classificazione fondata su queste leggi. L'ipotesi dell'esistenza di cristalli elementari formulata da René Just Haüy (1743-1822) verso la fine del Settecento, costituì la nozione base di reticolo cristallino e di maglia elementare su cui si sono basati tutti i successivi studi cristallografici. Senza la scoperta dei reticoli cristallini, non sarebbe stato possibile comprendere le forme dei cristalli. La simmetria fisica reale di un cristallo viene quindi rivelata dalla struttura fisica interna della sostanza cristallina, piuttosto che dal loro aspetto esteriore. Lanciando un ponte audace tra i lavori di Haüy e quelli di John Dalton (1766-1844), il padre della moderna teoria atomica, Ludwig Augustus Seeber (1793-1855) formulò nel 1824 l'ipotesi che i reticoli cristallini fossero costituiti di atomi, dando una stima delle distanze interatomiche e stabilendo un legame tra la sua ipotesi e le proprietà di elasticità e di dilatazione termica dei solidi. Soltanto nel 1912 Max von Laue (1879-1960) fornirà la prova sperimentale della diffrazione dei raggi X sui cristalli provando in un sol colpo l'esistenza dei reticoli cristallini e la loro struttura atomica, insieme alla natura ondulatoria dei raggi X. Ma a quell'epoca, grazie a un lavoro sistematico condotto sulla base della teoria dei gruppi, tutte le possibili forme cristalline erano già state classificate a priori.

## 2. Teoria dei gruppi e trasformazioni

In cristallografia la matematica della simmetria viene espressa attraverso la teoria dei gruppi, che rappresenta la simmetria in atto. La generalizzazione del concetto di invarianza, basato sulle simmetrie dei cristalli e sul riconoscere che le operazioni di simmetria di una figura geometrica formano un gruppo, ha trovato nel corso dell'Ottocento una sua rigorosa formulazione nella nozione di simmetria imperniata sul concetto di gruppo. Per conferire alle leggi di simmetria un ruolo operativo, facendole diventare uno strumento di investigazione, è stato necessario comprenderne le leggi matematiche. La classificazione di tutte le proprietà di simmetria dei cristalli segna in effetti la prima esplicita applicazione della nozione scientifica di simmetria nella scienza. Questa impresa, che ha fornito la classificazione di tutte le possibili forme cristalline esistenti in natura, si è avvalsa di concetti matematici sviluppati in un ambito del tutto diverso, che ancora una volta ha dimostrato – in modo eclatante – quella che Eugene Wigner (1902-1995) ha definito "l'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali".

La simmetria dei poligoni regolari o dei solidi platonici rappresenta un'idea statica della simmetria, uno stato di cose stabilito: si dice che un oggetto o una figura possiedono una certa simmetria se le sue parti omologhe sono sovrapponibili o se sono l'immagine l'una dell'altra in uno specchio. Una simmetria rispetto a una retta è, in realtà, una rotazione di 180°, il prodotto di due simmetrie in rapporto a degli specchi perpendicolari; allo stesso modo, una simmetria rispetto a un *centro* è il prodotto di tre simmetrie in rapporto a degli specchi perpendicolari a due a due, come nel caso del pavimento e dei muri all'angolo di una stanza. Ma le cose si possono guardare da un altro punto di vista. Invece di *constatare* una uguaglianza, o una corrispondenza tra certe figure o parti delle figure in uno specchio, si possono immaginare delle *trasformazioni*, o *applicazioni*, che le portino a sovrapporsi l'una con l'altra. In cristallografia, le trasformazioni di questo tipo comprendono le *rotazioni* e le *traslazioni* nello spazio, e le *simmetrie* speculari. Il termine *simmetria* ingloba tutte le trasformazioni che "conservano qualche cosa", così *le simmetrie di un cristallo* rappresentano tutte le trasformazioni che ne conservano la forma. Ogni *congruenza* tra due triangoli nel piano euclideo, per esempio, è una simmetria del piano. Tuttavia sono passati millenni prima che i matematici abbiano cominciato a considerare *la totalità* delle simmetrie del piano, il *gruppo* delle simmetrie del piano.

È il linguaggio dinamico delle *trasformazioni*, che mette appunto la simmetria in atto e conduce alla più profonda e fruttuosa nozione di *gruppo*. Se si considera l'operazione algebrica su un insieme di trasformazioni che combina due elementi per darne un terzo attraverso una legge di composizione, se ne può estrarre la nozione di gruppo, un'idea che verso la fine del XVIII secolo fu esplorata da Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Paolo Ruffini (1765-1822), e che fu pienamente sfruttata da Evariste Galois (1811-1832), che intorno al 1830 formulò in maniera del tutto nuova il problema di risolvere per radicali le equazioni di grado superiore o uguale al quinto.

Andando ben oltre il lavoro di alcuni precursori, piuttosto che affrontare direttamente il problema della ricerca delle soluzioni delle equazioni, Galois spostò l'attenzione sulle *condizioni di risolubilità delle equazioni*, e scoprì che le proprietà caratteristiche delle radici di una equazione risiedono nelle permutazioni che mantengono tra di esse un certo tipo di relazioni. Ragionando sul *gruppo delle permutazioni*, Galois riuscì a provare che a partire dal quinto grado le equazioni algebriche non sono generalmente risolubili per radicali, come nel caso delle equazioni di grado 2, 3 e 4.

La soluzione di questo problema algebrico costituiva di per se stessa un grande risultato, ma la scoperta vera e propria di Galois consisteva nella "semplificazione intellettuale" che metteva la struttura al di sopra dell'oggetto e definiva quest'ultimo a partire da quella. La struttura, nel caso in questione, è una legge di invarianza di certe relazioni tra le radici, *oggetti ancora sconosciuti,* e che possono restare tali se l'equazione non è risolubile. È proprio la scoperta della struttura che consente di ottenere il massimo possibile di informazioni sulle radici stesse.

Il lavoro di Galois chiariva definitivamente che un insieme di trasformazioni costituisce un gruppo in base alle seguenti condizioni:

– il *prodotto* di due trasformazioni del gruppo deve appartenere al gruppo;
– la trasformazione *inversa* di una trasformazione appartiene al gruppo, così come la trasformazione *neutra*, o *identità*;
– infine, il prodotto deve essere *associativo*, in modo che, nel prodotto di più trasformazioni è possibile sostituire una parte dei fattori con il loro prodotto parziale.

Come ha sottolineato Élie Cartan (1869-1951), uno dei maestri della teoria dei gruppi, "Un gruppo può essere considerato formato da tutte le operazioni di natura data che conservano certe proprietà degli oggetti a cui esse sono applicate, o certe relazioni tra questi oggetti" [3].

In sostanza, quindi, una legge di invarianza secondo un gruppo è soprattutto una legge di conservazione: conservazione di una forma, di una relazione, di una legge o di una grandezza fisica. L'applicazione della teoria dei gruppi all'analisi del concetto di simmetria in cristallografia, fornì ai fisici il primo esempio dell'eleganza e del potere del concetto matematico astratto di gruppo, conducendo alla classificazione di tutti i reticoli cristallini nel corso dei primi decenni dell'Ottocento. L'importanza dei gruppi cristallografici e il lavoro di Galois fornirono infatti l'ispirazione al giovane matematico tedesco Felix Klein (1849-1925), che applicò queste idee ai gruppi di trasformazione che lasciano invariati i poliedri regolari. Il suo *programma di Erlangen* del 1872, conteneva una visione nuova della geometria, una concezione unificatrice in cui non sono più le figure a giocare un ruolo chiave nella geometria, bensì i gruppi di trasformazione che le conservano [4]. Rotazioni e traslazioni rappresentano quindi gli spostamenti nello spazio euclideo che trasformano le figure in figure uguali. La cristallografia, i poliedri regolari e le equazioni algebriche fanno intervenire esclusivamente i *gruppi finiti,* quindi discontinui: rotazioni multiple di un angolo dato, traslazioni multiple di un certo passo (quello del reticolo cristallino), o permutazioni delle radici di un'equazione. Al contrario, la geometria di Klein fa intervenire dei *gruppi continui*, come gli spostamenti che dipendono in modo continuo da parametri come l'asse e l'angolo di rotazione o la direzione e l'ampiezza di una traslazione.

È a Sophus Lie (1842-1899), amico di Klein, che dobbiamo il primo studio generale dei gruppi continui, nati dall'ambizione di creare per le equazioni differenziali una teoria analoga a quella di Galois. I gruppi continui da lui creati, i *gruppi di Lie*, furono una scoperta gigantesca. Sono quelli che giocano il ruolo più importante in fisica.

Come nel caso di Galois, con il programma di Erlangen, si vede la struttura prevalere sull'oggetto. La geometria non è più fondata sugli oggetti tradizionali (punti, linee, superfici, figure) ma sul gruppo di trasformazioni che le conservano. Due geometrie apparentemente distinte in base agli oggetti su cui si fondano divengono equivalenti se sono caratterizzate dallo stesso gruppo di trasformazioni. D'altra parte, è la differenza tra le loro strutture di gruppo che distingue due geometrie. La teoria dei gruppi dice che la geometria euclidea è la sola a possedere delle figure simili, perché è la sola a possedere dei gruppi di similitudine, gruppi di trasformazioni che conservando gli angoli preservano la forma delle figure a cui sono applicate.

## 3. Fisica e invarianza

La vera svolta, nell'uso della simmetria nella scienza, venne quindi dall'introduzione del concetto di *gruppo*, e dai relativi sviluppi nella teoria dei cosiddetti gruppi di trasformazione. L'espressione matematica di una trasformazione è rappresentata da un *operatore*, una applicazione di un insieme in un altro, o in se stesso. Una traslazione nello spazio si ottiene per mezzo di un *operatore di traslazione*, che rappresenta l'azione dello spostamento. Allo stesso modo si parla di *operatori di rotazione*, intendendo l'azione di far ruotare. In meccanica quantistica le grandezze abituali della meccanica classica vengono sostituite da operatori: di *posizione,* di *impulso,* di *traslazione,* di *rotazione,* di *permutazione,* di *creazione* o di *annichilazione*, nel caso di un sistema di particelle.

Le traslazioni formano un gruppo, perché il prodotto di due traslazioni è ancora una traslazione, in particolare formano un gruppo *commutativo*, perché le traslazioni possono essere effettuate con un ordine qualsiasi, da cui il termine di *gruppo abeliano*, dal nome del matematico norvegese Niels Hendrik Abel (1802-1829). Le rotazioni invece, pur formando un gruppo, *il gruppo delle rotazioni spaziali*, o degli *spostamenti nello spazio che conservano un punto fisso*, non costituiscono un gruppo commutativo, poiché dipendono dall'ordine con cui sono effettuate.

La definizione gruppale di simmetria come *invarianza sotto uno specifico gruppo di trasformazioni*, consentì quindi l'applicazione di questo concetto in una forma molto più ampia, non soltanto alle figure nello spazio, ma anche ad oggetti astratti come le espressioni matematiche, in particolare espressioni che hanno una rilevanza fisica, come le equazioni dinamiche. Inoltre fu possibile trasferire tutto l'apparato tecnico della teoria dei gruppi e applicarlo con vantaggio all'interno delle teorie fisiche.

Il primo lavoro in cui si sottolinea esplicitamente l'importanza delle considerazioni di simmetria è un articolo di Pierre Curie (1859-1906) del 1894: "Je pense qu'il y aurait intérêt à introduire dans l'étude des phénomènes physiques les considérations sur la symétrie familières aux cristallographes".

Certamente è stato solo più tardi, con la teoria della relatività – e più ancora con l'avvento della meccanica quantistica – che le considerazioni di simmetria e di invarianza e la stessa teoria dei gruppi, sono entrate a far parte degli strumenti matematici e concettuali della fisica.

Perché la fisica si interessa alle proprietà di simmetria e perciò della teoria dei gruppi? Non è certo sufficiente ricorrere all'esigenza di armonia matematica dell'Universo che tanto aveva impressionato Kepler. È anche evidente che nella maggioranza dei casi la natura è, per fortuna, tutt'altro che simmetrica e la simmetria delle forme sembra quasi più l'eccezione che la regola. Se continuiamo a condividere la fede di Kepler, allo stesso tempo, come disse Hermann Weyl "Non ricerchiamo più questa armonia in forme statiche come i solidi regolari, ma in leggi dinamiche". Più precisamente la fisica moderna oggi pensa che gli enti a cui essenzialmente si debbano applicare le proprietà di simmetria siano le leggi della natura, cioè le correlazioni fra gli eventi e non già gli eventi stessi.

Questi possono variare da un posto all'altro, da un istante all'altro: quello che resta invariata invece è la forma della correlazione fra una serie di eventi e la serie corrispondente che avviene in altro punto o ad altro tempo.

Che le leggi della fisica godessero di certe proprietà di simmetria, fossero cioè invarianti rispetto a certi gruppi di trasformazioni, era noto da molto tempo. Così pure era stato dimostrato che in conseguenza delle equazioni del moto un certo numero di grandezze, gli integrali primi, o costanti del moto, rimangono invariate. Il primo uso esplicito delle proprietà di invarianza delle equazioni in fisica è connesso con l'introduzione, nella prima metà del XIX secolo, del concetto di trasformazione al problema del moto nell'ambito della meccanica analitica. Partendo dalla formulazione delle equazioni dinamiche della meccanica, William Hamilton (1805-1865), aveva sviluppato un metodo per la ricerca di quantità conservate. La sua teoria delle trasformazioni canoniche consentiva dei cambiamenti di coordinate tali da farne scomparire alcune, ottenendo così la conservazione dei corrispondenti momenti coniugati. Il metodo fu perfezionato da Carl Jacobi (1804-1851), che sviluppò una procedura per arrivare alla soluzione delle equazioni del moto basate sulla strategia di applicare le trasformazioni di variabili, che lasciano invariate le equazioni hamiltoniane, trasformando così passo dopo passo il problema originario in nuovi problemi più semplici, ma perfettamente equivalenti. La teoria delle trasformazioni canoniche di Jacobi, sebbene introdotta con lo scopo puramente strumentale di risolvere i problemi dinamici, aprì un'importante linea di ricerca: lo studio generale delle teorie fisiche in termini delle loro proprietà di trasformazione.

È stato però solo all'inizio del XX secolo che si è scoperta la relazione profonda tra principi di simmetria e leggi di conservazione.

È apparsa una connessione causale, del tutto insospettata dai fisici del XIX secolo, fra queste due proprietà, per cui la richiesta che la descrizione delle correlazioni fra i fenomeni abbia un significato obbiettivo indipendente dall'osservatore (cioè dal suo sistema di riferimento) implichi l'esistenza di costanti del moto.

## 4. La relatività e il gruppo di Lorentz

La relatività ristretta fu la prima grande teoria in cui la nozione di simmetria ha giocato un ruolo essenziale. Einstein (1879-1955) considerò un principio di simmetria come caratteristica primaria della natura, principio che determina quali sono le leggi dinamiche permesse. Così le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico non dovevano essere derivate dalla loro caratteristica di preservare le equazioni di Maxwell (1831-1879), come aveva fatto Hendrik A. Lorentz (1853-1928), ma piuttosto come conseguenza dell'invarianza relativistica che ne determina largamente la forma. Einstein riconobbe la simmetria implicita nelle equazioni, la elevò a simmetria dello spazio-tempo in sé, derivando poi le trasformazioni di Lorentz come conseguenza.

Le leggi della meccanica classica sono le stesse per tutti gli osservatori galileiani, vale a dire per osservatori in moto rettilineo uniforme gli uni in rapporto agli altri. Perché le velocità degli osservatori si aggiungono o si sottraggono se sono parallele e si compongono come vettori secondo la regola del parallelogramma se formano un angolo diverso da zero. Altrimenti detto, le trasformazioni tra osservatori in moto uniforme, o *trasformazioni di Galilei*, formano un gruppo, il *gruppo di Galilei*, che definisce l'*equivalenza* tra questi osservatori. Il problema si complica nel caso della relatività ristretta perché il tempo non è più lo stesso per i differenti osservatori e nuove trasformazioni, le *trasformazioni di Lorentz*, agiscono contemporaneamente sullo spazio e sul tempo. Ma dipendono dal rapporto tra velocità dell'oggetto in moto e velocità della luce, in modo tale che, se questo rapporto diviene molto piccolo, si ritrova la trasformazione di Galilei e il tempo ritorna ad essere lo stesso per tutti gli osservatori. Le trasformazioni di Lorentz, come quelle di

Galilei, formano un gruppo, il *gruppo di Lorentz*, ma più complicato, perché le velocità non si sommano più come in meccanica classica, in particolare la velocità risultante dalla somma di varie velocità resta sempre inferiore a quella della luce. Questa struttura di gruppo, stabilita da Henri Poincaré (1854-1912), assunse un senso quando Einstein sostituì la trasformazione di Lorentz a quella di Galilei in elettromagnetismo e in meccanica, facendo del gruppo di Lorentz la nuova espressione dell'equivalenza tra osservatori galileiani. Ma come mettere la dinamica in accordo con il principio di relatività? Fu fatto in maniera costruttiva, per tentativi, rimodellando le equazioni. La principale conseguenza è che la massa di un corpo in moto appare maggiore rispetto a quella dello stesso corpo a riposo. L'impulso, prodotto della massa per la velocità, viene modificato, il che cambia la legge di Newton: la forza non è più uguale al prodotto della massa per l'accelerazione, ma corrisponde alla variazione, per unità di tempo, del prodotto della massa per la velocità (che equivale alla legge di Newton soltanto se la massa resta costante). Infine, tutto ciò comporta un cambiamento dell'energia che è uguale, come ha mostrato Einstein, al prodotto della massa in movimento per il quadrato della velocità della luce. Si tratta della famosa formula $E = mc^2$: la massa di un corpo è la misura della sua energia interna. In effetti l'energia è legata all'impulso da una legge comune di conservazione. Queste nozioni, che hanno rivoluzionato la meccanica, si impongono quando un corpo in moto ha una velocità confrontabile con quella della luce, come nel caso degli elettroni atomici o delle particelle nei grandi acceleratori.

Questa via costruttiva trovò una formalizzazione potente con lo spazio-tempo di Minkowski (1864-1909), che in maniera più formale pose la dovuta enfasi sul concetto di simmetria dello spazio e del tempo, quali entravano nella teoria fisica della relatività speciale proposta da Einstein nel 1905. Questa simmetria, così contraria agli archetipi percettivi della razza umana, risultava incorporata nel sistema di riferimento primordiale della fisica. Una simmetria codificata nella cosiddetta *invarianza di Lorentz*. In effetti, cosa significa che una legge fisica è conforme al principio di relatività? È una legge la cui espressione non cambia quando si passa da un osservatore galileiano ad un altro, cioè quando si applica una trasformazione di Lorentz: è quella che si definisce *invarianza relativistica*, o *invarianza di Lorentz*, o *covarianza relativistica*. È facile verificare che una legge data è covariante; quello che è difficile è costruirla a priori. È là che interviene lo spazio-tempo, perché si può mostrare che le trasformazioni di Lorentz sono delle *rotazioni* dell'Universo a 4 dimensioni, e che le leggi della relatività sono *invarianti sotto il gruppo delle rotazioni dello spazio-tempo*, una nozione geometrica più semplice. Le trasformazioni di Lorentz sono delle rotazioni molto particolari, perché lo spazio-tempo di Minkowski non è esattamente euclideo, poiché lo spazio e il tempo figurano con segni opposti nel teorema di Pitagora (il quadrato di una lunghezza non è una somma ma una differenza di quadrati). Si può visualizzare il tutto definendo un tempo immaginario, che fa intervenire la radice di –1, fornendo allo spazio di Minkowski l'apparenza di uno spazio euclideo a 4 dimensioni. Una trasformazione di Lorentz corrisponde quindi a una rotazione di un angolo immaginario.

Il problema si riconduce a quello di esprimere le leggi della fisica in modo che non subiscano cambiamenti nel corso di rotazioni dello spazio-tempo. Osserviamo che, se vogliamo far ruotare una retta tracciata su un tavolo, questa ruoterà nel suo complesso, se vogliamo far ruotare il tempo (con angoli immaginari) è necessario far contemporaneamente ruotare un asse dello spazio. Questo non deve sorprendere, perché una trasformazione di Lorentz cambia allo stesso tempo lo spazio e il tempo.

In realtà quindi le rotazioni dello spazio-tempo riuniscono le trasformazioni relativistiche del tempo, i movimenti di traslazione nello spazio ordinario e le rotazioni di questo spazio; il *gruppo di Lorentz*, insieme delle rotazioni dello spazio-tempo, comprende come *sottogruppo* le rotazioni dello spazio ordinario. Tutto questo comporta che per esprimere una legge fisica invariante nello spazio ordinario o nello spazio-tempo è necessario far ricorso a delle grandezze o a degli oggetti geometrici che si conservano nel corso di una rotazione. Si trova quindi che in relatività quasi tutte le grandezze fisiche si raggruppano in *tensori dello spazio-tempo*. Un esempio di tensore è l'insieme delle forze che si esercitano su un cubo: le sei facce definiscono tre piani e in ciascuno si possono distinguere tre forze: una perpendicolare e le altre due parallele alla faccia ma con direzioni differenti. In tutto avremo nove forze che possono essere riunite in una sola entità, un tensore, di cui le nove forze sono le componenti, che in questo caso formano una matrice 3×3. Anche i vettori del campo elettrico e del campo magnetico, nonostante siano di natura geometrica diversa (rispettivamente un vettore polare e un vettore assiale) possono essere raggruppati in un solo tensore dello spazio-tempo. Essi non hanno un significato intrinseco separato: è il campo elettromagnetico che ha una sua identità nel suo insieme, che viene ben descritta dalla sua rappresentazione in forma di tensore. Questo non significa che la relatività impedisca di misurare separatamente effetti elettrici o magnetici, ma, in accordo con l'esperienza, impedisce di separare i due tipi di campo nel caso di corpi o osservatori in moto, il problema affrontato da Einstein nel suo lavoro del 1905. Allo stesso modo, contrariamente alla meccanica classica, la relatività impone che l'energia di un corpo in moto e il suo impulso non siano indipendenti l'uno dall'altro. Infatti non si conservano separatamente, è il vettore energia-impulso – un vettore a 4 componenti – che si conserva nel suo insieme.

La covarianza relativistica impone ai fisici dei vincoli che allo stesso tempo servono loro da guida. Pur misurando separatamente lo spazio e il tempo, queste grandezze possono figurare nelle equazioni della fisica soltanto insieme e in forma invariante per rotazioni dello spazio-tempo, in modo tale da conservare la forma delle leggi per tutti gli osservatori galileiani. È per mezzo di grandezze e operatori che obbediscono a queste leggi che sarà possibile scrivere equazioni covarianti che descrivono leggi relativistiche. Tale covarianza, quindi, diviene manifesta e i fisici sono in grado di riconoscerla a vista nelle equazioni.

Questo profondo cambiamento di atteggiamento divenne evidente nella formulazione della teoria generale della relatività. Il principio di equivalenza, un principio di simmetria locale, secondo cui le leggi della natura sono invarianti per cambiamenti locali delle coordinate spazio-temporali, determina la dinamica della gravità, dello spazio-tempo stesso.

## 5. Il significato di simmetria in fisica

Il progresso in fisica dipende dall'abilità di separare l'analisi di un fenomeno fisico in due parti. Come ha ben sottolineato Eugene Wigner, tra i pionieri della riflessione sul ruolo della simmetria in fisica, da una parte ci sono le condizioni iniziali che sono arbitrarie, complicate, e impossibili da prevedere. Dall'altro ci sono le leggi della natura che riassumono le regolarità che sono indipendenti dalle condizioni iniziali. Le leggi sono a volte difficili da scoprire, perché possono essere nascoste dalle irregolarità delle condizioni iniziali o dall'influenza di fattori incontrollabili come l'attrito o le fluttuazioni termiche. I principi di simmetria giocano un ruolo importante rispetto alle leggi. Essi riassumono in sé le regolarità delle leggi che sono indipendenti dalle dinamiche specifiche. Così i principi di invarianza forniscono struttura e coerenza alle leggi della natura, così come le leggi forniscono struttura e coerenza a un insieme di eventi. Senza le regolarità insite nelle leggi della fisica sarebbe impossibile scoprire le leggi stesse. Una volta stabilita questa "gerarchia", il passo successivo è quello di comprendere che i principi di simmetria sono perfino più potenti, essi determinano la forma stessa delle leggi della natura.

La relazione tra leggi di conservazione e simmetria è chiaramente presente nella fisica classica, come fu già compreso dallo stesso Newton. Implicitamente veniva anche riconosciuto che l'abilità di ripetere esperimenti in differenti luoghi e in tempi diversi si basa sull'invarianza delle leggi di natura sotto traslazioni spazio-temporali. Nel caso della conservazione del momento angolare, per esempio, è evidente la connessione con l'isotropia dello spazio. Se la direzione della forza tra una coppia di particelle non fosse diretta lungo la linea da una particelle all'altra, non sarebbe invariante per rotazioni intorno a quella linea. Quindi, sono possibili soltanto forze di tipo centrale. Poiché la coppia generata da tali forze è nulla se esse sono uguali ed opposte, ne segue la legge di conservazione del momento angolare. Non sarebbe così se le forze dipendessero dalla posizione di tre o più particelle. Senza le regolarità incorporate nelle leggi della fisica saremmo incapaci di cogliere il senso degli eventi fisici; senza queste regolarità non saremmo nemmeno capaci di scoprire le leggi stesse. Questo legame tra simmetrie e leggi di conservazione fu esplorato sistematicamente e chiarito definitivamente tra il 1915 e il 1918 attraverso il lavoro della matematica tedesca Emmy Noether (1882-1935), la "madre" dell'algebra astratta per i matematici e ben conosciuta dai fisici per essere l'autrice del famoso teorema che porta il suo nome, un lavoro scaturito dalle riflessioni dei matematici di Göttingen sulla teoria generale della relatività di Einstein.

## 6. Simmetrie e leggi di conservazione: il "teorema di Noether"

L'uso della matematica della teoria dei gruppi per lo studio delle teorie fisiche fu centrale nel lavoro di matematici come Felix Klein, David Hilbert (1862-1943), Hermann Weyl e Emmy Noether, figure di primo piano che operarono a Göttingen tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, quando maturò la consapevolezza che le leggi di conservazione della fisica, note fin dai tempi di Newton, sono correlate alla simmetria [5].

Nell'estate del 1915, poco dopo l'arrivo di Emmy Noether a Göttingen, Einstein tenne sei seminari sulla teoria generale della relatività, a cui Hilbert e Klein erano profondamente interessati. La stessa Noether era stata da loro invitata proprio per le sue ampie conoscenze sulla teoria degli invarianti matematici.

Hilbert era interessato da molti anni ai fondamenti della fisica e anche Klein da tempo seguiva con attenzione il lavoro di Einstein, in cui vedeva realizzate in pieno le sue idee legate al concetto di invarianza, che avevano costituito la base del suo programma di Erlangen. Il completamento della teoria generale aveva lasciato aperta la questione della conservazione dell'energia, un tema su cui Klein stava lavorando e per il quale aveva chiesto il supporto della Noether. Nella teoria generale l'energia non si conserva localmente come nelle teorie classiche (gravitazione newtoniana, elettromagnetismo, idrodinamica, ecc.), una questione che generava molta perplessità e a cui Hilbert si riferiva come "il venir meno del teorema dell'energia".

Il 19 luglio del 1918 Klein presentò all'Accademia Reale delle Scienze di Göttingen un lavoro sul tema dell'impulso e dell'energia nella teoria generale di Einstein in cui ringraziava la Noether per l'aiuto, ma sottolineava anche che il suo risultato costituiva un caso particolare di un "teorema" di ben più ampia portata formulato dalla Noether e che lui presentò all'Accademia la settimana successiva. Nel lavoro "Invariante Variationsprobleme" venivano presentati due teoremi e i loro inversi che rivelavano nel modo più generale la connessione tra simmetrie e leggi di conservazione in fisica, generalizzando una serie di risultati ottenuti in epoche diverse a tutti i gruppi continui finiti e infiniti. Questi teoremi fornirono la base concettuale per molte grandi scoperte teoriche del XX secolo.

Ciascun principio di conservazione di una quantità fisica si basa sull'invarianza formale delle leggi. Per ciascuna simmetria continua o discreta della funzione di Lagrange, che rappresenta il sistema fisico, esiste una grandezza che si conserva nel corso dell'evoluzione del sistema. Nel caso delle trasformazioni euclidee il teorema fornisce la conservazione dell'energia totale, dell'impulso e del momento angolare in corrispondenza dell'invarianza della lagrangiana per traslazione temporale, spaziale, rotazione. I tre grandi principi di conservazione della fisica si basano ciascuno su una ben precisa simmetria dello spazio-tempo. Nel 1890 Poincaré aveva messo in evidenza, senza dimostrarla esplicitamente, la connessione fra invarianza delle equazioni del moto sotto traslazioni spaziali e temporali, rotazioni e trasformazioni di Galilei, la conservazione dell'energia, dell'impulso, del momento angolare e del moto uniforme del centro di massa. Nel 1911 Klein si era reso conto che la connessione fra proprietà di simmetria di un sistema e le sue leggi di conservazione è correlata al lavoro di Lie sulla teoria dei gruppi applicata alle equazioni differenziali. Su suggerimento di Lie, Friedrich Engel (1861-1941), studente e collaboratore di Lie, aveva mostrato nel 1916 la connessione fra gruppo di invarianza della meccanica classica e le leggi di conservazione della quantità di moto, del momento angolare e della velocità del baricentro in un caso particolare e nell'ambito della teoria di Lie. Queste ricerche estendevano alla meccanica galileiana e relativistica il punto di vista che Klein aveva già applicato con successo alla geometria. Come diceva Sophus Lie "I principi della meccanica hanno un'origine gruppale".

Il primo teorema di Noether contiene la derivazione delle 10 leggi classiche di conservazione della meccanica già scoperte da Joseph Louis Lagrange, William Rowan Hamilton e Carl Gustav Jacobi. Il Teorema I riguarda le simmetrie descritte da gruppi di Lie finito-dimensionali, come il gruppo delle rotazioni, il gruppo di Lorentz. Se il sistema è invariante rispetto al gruppo, esiste una quantità conservata corrispondente a ciascun elemento dell'algebra di Lie che ha come elementi i generatori del gruppo. Per una teoria di campo il Teorema I afferma che esiste una corrente localmente conservata per ciascun elemento dell'algebra. Questo risultato molto generale è valido per sistemi discreti, continui, classici e quantistici. Il Teorema II afferma che quando l'azione è invariante rispetto a un gruppo di Lie infinito-dimensionale valgono certe identità, o "dipendenze" come le chiamava la Noether, tra le funzioni di Lagrange della teoria e le loro derivate. Nel caso particolare della relatività generale queste non sono altro che le "identità di Bianchi" che forniscono la legge di conservazione del tensore energia-impulso a partire dalle equazioni del campo. Tullio Levi-Civita (1873-1941), che conosceva queste identità dal suo maestro Ricci- Curbastro (1853-1925) [derivate indipendentemente da Luigi Bianchi (1856-1928) nel 1902], aveva dimostrato questa legge di conservazione nel 1917 ("Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein").

Il lavoro della Noether incorporava in modo inedito differenti campi della matematica e della fisica matematica:

1) La teoria degli invarianti algebrici e differenziali
2) La geometria di Riemann (Bernhard, 1826-1866) e il calcolo delle variazioni nel contesto della relatività generale, della meccanica e della teoria dei campi
3) La teoria dei gruppi, in particolare la teoria dei gruppi di Lie per risolvere le equazioni differenziali per mezzo dei loro gruppi di invarianza.

I teoremi di Noether si applicano alle lagrangiane e alle densità di lagrangiane dipendenti da un numero arbitrario di campi con un numero arbitrario di derivate. Per molto tempo questi notevoli risultati non vennero menzionati, nemmeno da Weyl, che ben doveva comprenderne le implicazioni. Il ritorno in auge delle formulazioni lagrangiane ha riportato all'attenzione il primo teorema – quello a cui i fisici si riferiscono quando parlano del "teorema di Noether" – soprattutto dopo il 1958, quando Feynman (1918-1988) e Gell-Mann (1929) pubblicarono il lavoro sulla teoria V-A delle interazioni deboli. Pur non facendo alcun riferimento esplicito, misero in evidenza la connessione tra correnti conservate e simmetrie. Anche Schwinger (1918-1994) ha usato il teorema nel 1957, pur non facendo riferimento alla Noether. Nina Byers ha messo in evidenza come con l'approccio hamiltoniano non sia stata favorita la connessione, che invece emerge, quando si comincia a pensare alle teorie delle interazioni forti e deboli come a teorie di campo lagrangiane, governate da un principio di azione [6]. Quando la teoria lagrangiana di campo diventa il punto di partenza per una teoria delle particelle elementari, quando i teorici hanno cominciato ad utilizzare gli integrali sui cammini, i gruppi di Lie e le simmetrie di *gauge*, il teorema di Noether divenne finalmente uno strumento di base nel loro arsenale.

## 7. Applicazioni della teoria dei gruppi in fisica: le rappresentazioni dei gruppi

La relazione tra leggi di conservazione e simmetria, chiaramente presente nella fisica classica, ha trovato con il teorema di Noether una definitiva chiarificazione e sistematica formulazione. Tuttavia soltanto molto più tardi i fisici sono divenuti realmente consapevoli della profondità e delle potenzialità derivanti dal lavoro della Noether. È invece con la nuova meccanica quantistica, sviluppatasi tra il 1925 e il 1927, che l'importanza della simmetria venne alla ribalta, aprendo la via a un nuovo stile di pensiero e divenendo poi, nella seconda metà del Novecento, il concetto che ha guidato l'esplorazione e la formulazione delle leggi fondamentali della fisica e la ricerca di una loro unificazione.

In meccanica quantistica, lo stato di un sistema dinamico viene descritto da numeri quantici, che danno il valore di una quantità conservata nella dinamica del sistema e quindi designano le proprietà di simmetria dello stato. Ai numeri quantici sono associate delle regole di selezione che governano la variazione dei numeri quantici stessi nel corso delle transizioni tra stati. I numeri quantici e le regole di selezione erano stati scoperti prima della formulazione della meccanica quantistica, ma il loro significato in termini di simmetria divenne apparente soltanto dopo gli sviluppi del periodo 1925-1927. Fu così che la simmetria cominciò a permeare anche i linguaggi di queste nuove aree della fisica.

L'equazione di Schrödinger (1887-1961) non descrive direttamente un oggetto fisico, come un atomo, ma lo fa attraverso una funzione d'onda, le cui diverse espressioni corrispondono agli stati dell'atomo. L'atomo o la molecola a loro volta possiedono certe simmetrie. Ed è qui che interviene una proprietà fondamentale dell'equazione di Schrödinger e delle principali equazioni della meccanica quantistica: la *linearità*. In questo caso vuol dire che la somma di due o più soluzioni dell'equazione di Schrödinger è ancora una soluzione e che moltiplicando una soluzione per un numero, si ritrova una soluzione. A partire da una soluzione dell'equazione che descrive un'orbita ellittica si possono ottenere altre soluzioni per mezzo di rotazioni. Tali soluzioni, correlate tra loro da trasformazioni di simmetria, corrispondono a stati fisici diversi.

I vettori dello spazio ordinario possiedono questa proprietà: la somma di più vettori è un vettore così come il prodotto di un vettore per un numero. Le onde, soluzioni dell'equazione di Schrödinger, formano dunque uno spazio vettoriale; e poiché sono delle funzioni, si dice che si tratta di uno spazio funzionale. Inoltre, poiché l'equazione possiede una infinità di soluzioni, lo spazio sarà a infinite dimensioni. Tale spazio è uno *spazio di Hilbert*, uno spazio vettoriale – che ha una struttura lineare – su cui è definito un prodotto scalare, così da poter definire distanze, angoli, relazioni di ortogonalità. Una trasformazione di simmetria in questo spazio dà origine a un operatore lineare che agisce su tali stati trasformandoli in nuovi stati. Le grandezze fisiche come posizione, impulso, ecc. sono operatori che agiscono su questi vettori. Tutte le soluzioni dell'equazione, tutti gli stati fisici dell'atomo saranno rappresentati da una sovrapposizione di tali stati. Questi stati di base rappresentano gli stati quantici di Bohr (1885-1962) e sono un caso particolare dei modi normali di vibrazione di un'onda.

In fisica classica la simmetria può essere utilizzata per generare nuovi stati possibili per il sistema fisico. Dall'invarianza rotazionale segue, per esempio, che dato uno stato qualsiasi, ne esiste un altro perfettamente equivalente in un sistema di coordinate ottenuto per rotazione intorno a un certo asse. In meccanica quantistica questa operazione diviene assai più potente grazie appunto alla linearità delle trasformazioni di simmetria e al *principio di sovrapposizione*. Questo significa che è possibile costruire una combinazione lineare tra lo stato iniziale e lo stato trasformato che si ottiene semplicemente sotto trasformazioni di simmetria. Non esiste un analogo classico nel caso, per esempio, della sovrapposizione di due diverse orbite terrestri. Mentre invece sovrapponendo *tutti* gli stati che sono il risultato di rotazioni si ottiene uno stato *invariante per rotazione*, una cosiddetta *rappresentazione del gruppo delle rotazioni*.

Per esempio, lo stato a energia più bassa, lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, rappresenta uno stato di questo tipo. Altre sovrapposizioni di stati ruotati forniranno nuove rappresentazioni del gruppo di simmetria.

Qual è il significato di questa operazione? Come si è visto precedentemente, sostituire le trasformazioni di Lorentz con le rotazioni dello spazio-tempo significa ottenere l'*immagine* di un gruppo più fisico – quello relativo a un cambiamento di sistema di riferimento – su un altro gruppo, più astratto, ma più facile da maneggiare. Si dice che questi gruppi sono *isomorfi*. In generale, quindi, si considera un elemento $g$ di un gruppo $G$ e, se a tale elemento si può far corrispondere un'applicazione A, ovvero l'azione di una trasformazione, lineare ed invertibile, applicata a un vettore $\boldsymbol{v}$, che appartiene ad uno spazio vettoriale lineare a n dimensioni, si ottiene una corrispondenza tra l'elemento del gruppo $g$ e la sua rappresentazione matriciale ($n \times n$, $G$) che mette in atto tale trasformazione [7].

Questo procedimento si ritrova in numerosi gruppi di trasformazioni, in particolare quelli che si incontrano in fisica. A ciascuno di essi è possibile associare non solamente uno spazio, ma una infinità di spazi con un numero crescente di dimensioni, fino all'infinito; sono quelli che vengono chiamati gli *spazi della rappresentazione*. Sono spazi vettoriali nel senso che sono costituiti di oggetti geometrici per i quali è possibile definire (in forma generale) una direzione, un verso, una lunghezza, una somma, una moltiplicazione per un numero. Le loro componenti sono delle funzioni alle quali le trasformazioni del gruppo applicano le cosiddette *trasformazioni lineari*, così denominate perché trasformano una retta in un'altra linea retta. Queste trasformazioni sono le *rappresentazioni lineari* del gruppo di ordine 1, 2, 3, ecc. a seconda della dimensione dello spazio su cui agiscono. Le rotazioni forniscono un esempio di trasformazioni lineari, e quelle che riguardano lo spazio-tempo costituiscono, in questo senso, una *rappresentazione del gruppo di Lorentz*.

Si impone qui una domanda: cosa guadagna la fisica a sostituire le rotazioni di oggetti solidi nel nostro spazio, con delle rotazioni che si applicano a dei vettori definiti da funzioni immaginarie in spazi astratti? La risposta è semplice: le equazioni della meccanica quantistica non hanno per soluzioni oggetti del nostro spazio, bensì le funzioni in questione, ed è attraverso di esse che vengono descritti i fenomeni che si svolgono nello spazio fisico. Da questi argomenti è possibile intuire che il ruolo assai più ampio che la simmetria gioca in fisica quantica deriva appunto dal fatto che la matematica della meccanica quantistica è lineare, così che la simmetria rotazionale di *tutte* le orbite può essere per esempio analizzata immediatamente attraverso la *teoria delle rappresentazioni dei gruppi delle rotazioni*. Se un sistema fisico rappresentato per mezzo dell'equazione di Schrödinger possiede un gruppo di invarianza (per esempio un atomo invariante per rotazione) e se questo sistema si trova in un certo stato, una trasformazione del gruppo fornisce un altro stato del sistema. Uno stato è rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert. Un altro stato sarà rappresentato da un altro vettore e la trasformazione sarà una rotazione del primo verso il secondo. Abbiamo quindi una rappresentazione del gruppo delle trasformazioni per mezzo di rotazioni nello spazio costituito dalle soluzioni dell'equazione di Schrödinger. Si può anzi mostrare che lo spazio di Hilbert, a infinite dimensioni, si scinde in una serie di sotto-spazi a 1, 2, 3 dimensioni, ecc. ciascuno dei quali possiede degli stati di base soluzioni dell'equazione. Se si applica al sistema una trasformazione appartenente al suo gruppo di invarianza (per esempio una rotazione dello spazio fisico), ciascuno dei sotto-spazi ruota su se stesso senza mescolarsi con gli altri e costituisce da solo una *rappresentazione* del gruppo. Queste rappresentazioni hanno dunque un senso fisico, giocano un grande ruolo in meccanica quantistica, perché dalla loro conoscenza preliminare, a partire dalle leggi di invarianza di un sistema, è possibile ottenere informazioni *a priori* sulle funzioni d'onda, prima ancora di risolvere l'equazione, e anche nel caso in cui non si fosse capaci di risolverla. Una di queste informazioni consiste nella *classificazione degli stati quantici* a partire da semplici dati geometrici.

Per esempio, se il gruppo di invarianza è quello delle rotazioni dello spazio fisico, ciascuna delle rappresentazioni corrisponde a un valore del momento angolare dell'atomo e gli stati dell'atomo che corrispondono allo stesso valore del momento angolare sono essi stessi numerati in base ai valori del momento in rapporto a un asse, come quello relativo a un campo magnetico che agisce sull'atomo.

La classificazione degli stati quantici è dunque data dalle rappresentazioni lineari del gruppo di invarianza di un sistema fisico, e gli stati quantici corrispondenti sono classificati in base ai valori assunti dalle grandezze fisiche associate a tale gruppo. Come diceva Hermann Weyl, la cui profondità del pensiero matematico lo portò ad interessarsi anche alle applicazioni della teoria dei gruppi alla fisica: "Tutti i numeri quantici, ad eccezione del numero quantico principale, sono degli indici caratterizzanti le rappresentazioni dei gruppi" [8].

La classificazione degli stati quantici fondata sulle rappresentazioni di un gruppo, risiede sul fatto che lo spazio infinito degli stati, lo spazio di Hilbert, si decompone in rappresentazioni finite e che questa decomposizione si conserva nel corso del tempo. È evidente che se un sistema fisico, nel corso della sua evoluzione, potesse passare da una rappresentazione a un'altra, questa classificazione non sarebbe più possibile. La conservazione di questa decomposizione nello spazio è legata alla conservazione della grandezza fisica ad essa associata. E in effetti, poiché le rappresentazioni sono associate ai valori quantici di una grandezza fisica, dire che la decomposizione dello spazio si conserva o dire che i valori della grandezza associata si conservano, significa dire qualcosa che ha un significato assolutamente equivalente. È quindi evidente che le leggi di simmetria possono regnare soltanto su sistemi fisici nei quali le leggi di conservazione sono intrinseche ai sistemi stessi.

La manifestazione più eclatante della quantizzazione di un sistema atomico è l'esistenza di uno spettro luminoso nella luce emessa o assorbita; questi raggi spettrali sono emessi nel corso di transizioni tra differenti stati del sistema. Quindi la classificazione degli stati quantici fornita dal gruppo di invarianza, a grandi linee corrisponde allo stesso tempo ad una classificazione delle componenti dello spettro. Tutto questo senza che sia necessario risolvere l'equazione di Schrödinger. Verso la fine degli anni Venti, nell'affrontare lo studio degli spettri di atomi con 3 o più elettroni, Eugene Wigner si trovò di fronte alla necessità di analizzare *tutte* le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni, chiamato SO(3), oltre alle simmetrie discrete della parità e dell'inversione temporale. Wigner si rese conto che in questo modo era infatti possibile classificare *tutti* gli stati del sistema atomico dotati di questa stessa simmetria ottenendo un potente metodo per l'analisi dei sistemi stessi. Per questo motivo, la *teoria delle rappresentazioni dei gruppi continui e discreti* gioca un ruolo fondamentale per dedurre le conseguenze della simmetria in meccanica quantistica. Utilizzando gli strumenti della teoria dei gruppi che egli stesso contribuì a sviluppare, Wigner fu in grado di derivare molte conseguenze e di spiegare varie caratteristiche degli spettri. In effetti, non è possibile osservare tutti i possibili raggi spettrali corrispondenti a transizioni tra stati quantici: alcuni sono permessi, altri proibiti. In particolare Wigner mostrò che molte regole di selezione che governano gli spettri atomici sono appunto le conseguenze della simmetria rotazionale. La conoscenza dei gruppi di invarianza è da sola sufficiente per la ricerca delle regole di selezione, di nuovo senza dover risolvere l'equazione di Schrödinger. È stata l'applicazione sistematica di questi metodi che ha permesso fra l'altro di comprendere che praticamente *tutte le regole della spettroscopia* seguono dalla simmetria del problema. La cosa è tanto più significativa in quanto la complicazione dei sistemi atomici (o molecolari o nucleari) non consente in genere una trattazione analitica completa del problema. La correlazione fra fenomeni diversi, che è lo scopo ultimo della fisica, può dunque essere ottenuta senza conoscere i dettagli della dinamica del sistema ma soltanto le proprietà di invarianza delle leggi elementari del moto rispetto ad un gruppo di trasformazione. Wigner ebbe anche un gigantesco ruolo pedagogico, perché introdusse un'intera generazione di fisici alle riflessioni sul ruolo della simmetria in fisica e soprattutto agli strumenti della teoria dei gruppi, che più tardi, dopo le sue applicazioni pionieristiche alla meccanica quantistica, ebbero un ruolo fondamentale nella fisica nucleare e in particolare nella fisica delle particelle [9]. Per questi contributi nel 1963 ebbe il premio Nobel per la fisica.

Altre simmetrie sono in gioco in meccanica quantistica, che non hanno un equivalente classico. Gli elettroni, in particolare, non sono distinguibili l'uno dall'altro, e quindi le leggi che li descrivono devono essere invarianti per permutazione delle loro coordinate. D'altra parte, se l'atomo non è immerso in alcun campo di forza, magnetico o elettrico, non esiste una direzione privilegiata e lo spazio sarà isotropo: le leggi dovranno essere invarianti per rotazione attorno ad un *asse qualunque*. Se una direzione dello spazio è privilegiata, per esempio per la presenza di un campo magnetico, le leggi saranno invece invarianti soltanto per rotazioni intorno a questo asse.

I differenti gruppi di trasformazione che intervengono nelle simmetrie precedenti non hanno tutti il medesimo statuto. Così l'invarianza per permutazione degli elettroni, conseguente dalla loro indistinguibilità, è una simmetria intrinseca per ciascuno stato dell'atomo. Essa fornisce una informazione a priori sulla forma delle soluzioni dell'equazione, che ha un senso prima ancora che vengano calcolate, e anche nel caso in cui non siamo in grado di calcolarle. Ma l'invarianza per rotazione di un atomo isolato risulta invece dalla simmetria sferica della forza di attrazione del nucleo atomico. Si tratta di una simmetria estrinseca, che governa la legge del moto e non ciascuno stato dell'atomo. Solo *l'insieme degli stati* possiede quindi simmetria sferica.

Questo si capisce facilmente nel caso del sistema solare. Essendo lo spazio isotropo, il sistema solare è a simmetria sferica, e tuttavia i pianeti non descrivono dei cerchi intorno al Sole, ma delle ellissi, perché ciascun moto planetario non è a simmetria sferica. Soltanto l'insieme dei movimenti possibili possiede questa simmetria, il che vuol dire che se conosciamo un moto planetario, tutti i movimenti ottenuti a partire da questo per rotazione sono ugualmente possibili. In particolare, si trova che le orbite planetarie sono nello stesso piano, ma non si tratta di una proprietà intrinseca, bensì di una indicazione sulle condizioni in cui è nato il sistema solare, come si comprende pensando ai satelliti artificiali il cui piano di rotazione può essere qualsiasi, a seconda del piano in cui vengono lanciati. Così nel caso di un atomo, tutti gli stati non sono a simmetria sferica, ma ogni rotazione di uno stato ne fornisce un altro. Più generalmente, se un sistema è invariante per un gruppo, tutte le trasformazioni del gruppo applicate a uno stato del sistema forniscono un altro stato.

## Conclusione

Quando i gruppi hanno preso il potere in matematica, è stato sviluppato un rigoroso apparato teorico che ha inquadrato tutte le conoscenze e gli sviluppi successivi in modo sistematico. In fisica l'evoluzione è stata più lunga. In cristallografia l'invarianza è stata una proprietà constatata, e lo stesso avvenne in elettromagnetismo, quando Pierre Curie dedusse le leggi di simmetria del campo elettrico e del campo magnetico a partire dall'esperienza, dando prova di un nuovo spirito, in cui la ricerca delle proprietà degli oggetti fisici veniva fatta a partire da ciò che le leggi di simmetria consentivano. Ma con la relatività tutto è cambiato. L'invarianza di Lorentz, proprietà dell'elettromagnetismo che Einstein ha eretto a principio generale, ha dato origine alla nozione di covarianza e alla sua espressione geometrica nello spazio-tempo. La frattura prodotta fu ben descritta da Chen Ning Yang (1922), che insieme a T.D. Lee (1926) ebbe il premio Nobel per la fisica nel 1957 per la scoperta della violazione della parità [10]:

> Il primo grande principio di simmetria in fisica fondamentale è stato l'invarianza di Lorentz, vista come proprietà matematica delle equazioni di Maxwell, le quali furono fondate sulle leggi dell'elettromagnetismo sperimentalmente osservate. Successivamente, partendo dall'invarianza di Lorentz, Minkowski ha richiesto che tutte le equazioni di campo siano covarianti in rapporto a questa legge di simmetria, il che può essere riassunto nello schema seguente:
>
> esperienza → equazioni di campo → simmetria (prima di Einstein e Minkowski)
> simmetria → equazioni di campo (dopo Einstein e Minkowski).
>
> La potenza delle leggi di simmetria e delle loro conseguenze fisiche fece grande impressione su Einstein. Egli partì da una generalizzazione dell'invarianza di Lorentz, che lo condusse, insieme al principio di equivalenza, alla teoria generale della relatività. Si può affermare che è stato Einstein ad introdurre, allo stesso modo, un nuovo principio: è la simmetria a dettare le interazioni.

Ciò che prima rappresentava una guida, è divenuto un principio. Secondo Einstein le equazioni della gravitazione non potevano essere scoperte che sulla base di un principio puramente formale (la covarianza generale), vale a dire sulla base della convinzione che le leggi della natura hanno la più grande semplicità logica immaginabile. Per questo motivo possiamo dire che il passaggio dalla fisica dei modelli alla fisica formale – il passaggio dal concetto di simmetria derivante dalle leggi fisiche a quello delle leggi fisiche che emanano dalla simmetria – ha costituito la grande rottura tra la fisica del Novecento e la fisica del passato.

Una nuova svolta è avvenuta all'inizio degli anni Sessanta del Novecento, quando i fisici si sono impadroniti pienamente della teoria dei gruppi, lo strumento che ha consentito soprattutto nel campo della fisica delle particelle di mettere in atto una strategia basata sull'uso sistematico dei principi di simmetria. La ricerca delle particelle fondamentali si è trasformata nella ricerca delle simmetrie fondamentali che definiscono le leggi che a loro volta determinano lo spettro stesso delle particelle elementari e che addirittura hanno consentito di prevedere l'esistenza di particelle non ancora scoperte. La fisica teorica è divenuta sempre più astratta; non si cercano più le leggi di simmetria delle particelle, esse *sono* le particelle stesse.

## Bibliografia


[1] Weyl, H. *La simmetria*, 2ª edizione, Feltrinelli, Milano, 1981.

[2] Bonolis, L. "L'avvento della teoria dei gruppi nella fisica del novecento", *LFnS*, XXXVIII, 4 Supplemento, 2005, 120-136.

[3] Cartan, E. "La théorie des groupes", Conferenza tenuta nel 1944 a Parigi, Palais de la Découverte, *Revue du Palais de la Découverte*, 17, (1989), 15-25.

[4] Magnani, L. e Dossena, R. (a cura di), *Felix Klein: il Programma di Erlangen*, PRISTEM/Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura, 7, Springer–Verlag, Milano, 2003.

[5] Bonolis, L. "Matematici e fisici a Göttingen. Amalie Emmy Noether e la nascita delle superleggi: simmetrie e invarianze", *LFnS*, XLIII, 3 Supplemento, 2010, 52-67; Hanc, J. *et al.*, "Symmetries

and conservation laws: Consequences of Noether's theorem", *Am. J. Phys.*, 72, 4, (2004), 428-435, http://www.eftaylor.com/pub/symmetry.html.

[6] Byers, N. "Emmy Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws", http://www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.asg/noether.html.

[7] Wolbarst, A.B. "An intuitive approach to group representation theory", *Am. J. Phys.* 45, 9, (1977), 803-810; "An intuitive approach to group representation theory II, *Am. J. Phys.* 47, 1, (1979), 103-112.

[8] Weyl, H. *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, 1950.

[9] Wigner, E.P. "Symmetry and Conservation Laws", *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA, 51, (1964), 956-965, http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300191/pdf/pnas00179-0248.pdf.

[10] Yang, C.N. "Symmetry and Physics", *Proc. Am. Phil. Soc.*, 140, 3, (1996), 267-288, http://www.jstor.org/stable/987310.

Come avrà modo di osservare Hermann Weyl, il vero e profondo significato delle intuizioni di Riemann sfugge alla maggior parte dei suoi contemporanei, "con l'eccezione di un'eco solitaria in W. K. Clifford". In effetti, Clifford – traduttore della *Habilitationsvortrag* in inglese – in una breve nota del 1870 indica come le "speculazioni [di Riemann] possano essere applicate all'indagine dei fenomeni fisici", sostenendo che:

- porzioni piccole dello spazio *sono* di fatto per loro natura analoghe a collinette su una superficie che è in media piatta; il che vuol dire che le leggi usuali della geometria non sono valide su tali porzioni;
- questa proprietà di essere curvo o distorto è trasferita incessantemente da una porzione dello spazio a un'altra alla maniera di un'onda;
- questa variazione della curvatura dello spazio è ciò che effettivamente avviene nel fenomeno che chiamiamo *moto della materia,* sia questa ponderabile e eterea;
- nel mondo fisico non ha luogo altro se non questa variazione che potrebbe essere forse sottoposta alla legge di continuità.

Nell'opera postuma *The Common Sense of the Exact Sciences* Clifford sviluppa più diffusamente queste idee, all'interno di una concezione della geometria come "scienza fisica".
Il pericolo di asserire dogmaticamente che un assioma basato sull'esperienza di una regione limitata valga universalmente apparirà ora, almeno in una qualche misura evidente al lettore. [Una simile asserzione] potrebbe indurci a trascurare completamente […] una possibile spiegazione dei fenomeni. Le ipotesi che lo spazio non sia omaloide [cioè, piatto] e che per di più, il suo carattere geometrico possa cambiare al variare del tempo, possono essere destinate oppure no a svolgere un ruolo importante nella fisica del futuro; e tuttavia non possiamo rifiutare di considerarle come possibili spiegazioni dei fenomeni fisici per la ragione che esse appaiono in contrasto con la credenza dogmatica popolare nell'universalità di certi assiomi geometrici – una credenza che è il risultato di secoli di incondizionata venerazione del genio di Euclide.

Claudio Bartocci, *Una piramide di problemi*, Raffaello Cortina Editore 2012, p. 113