

Luisa Bonolis

Università "La Sapienza", Roma

Da Einstein a Jordan e Dirac

La nascita dell'elettrodinamica quantistica

Introduzione¹

L'applicazione della teoria quantistica al campo di radiazione e in particolare alla radiazione elettromagnetica è vecchia almeno quanto la teoria quantistica stessa. Basti pensare all'introduzione della costante h , divenuta successivamente nota come costante di Planck, in associazione ai "pacchetti di energia" emessi ed assorbiti dagli "oscillatori" del campo di radiazione all'interno di una cavità. Più tardi Bohr estese queste idee dalla dinamica della radiazione alla dinamica delle particelle. I successivi sviluppi si concentrarono poi sulla descrizione di particelle e di sistemi di particelle sviluppando la teoria basandosi sull'edificio teorico costruito dalla nuova meccanica quantistica.

La teoria quantistica dei campi si è sviluppata nei suoi concetti fondamentali come tentativo di combinare gli aspetti ondulatori e corpuscolari della radiazione, aspetti che a loro volta scaturiscono in modo naturale quando si tenta di scrivere una equazione di Schrödinger relativistica per una particella libera. Fin dall'inizio, la trattazione quantistica del campo andò di pari passo con gli sviluppi della nuova meccanica quantistica, anche se apparve subito chiaro che esistevano degli aspetti più sottili nell'interazione tra radiazione e materia, che non potevano essere trattati in modo semplice e che richiedevano un'estensione dei metodi della teoria quantistica allo stesso campo di radiazione.

Faraday e Maxwell rappresentavano lo spazio che circonda le cariche elettriche come riempito da campi elettromagnetici caratterizzati dai vettori E e H . Le leggi dell'elettromagnetismo classico codificate nelle equazioni di Maxwell connettevano i campi elettrici e magnetici con la densità di carica e la densità di corrente. Unite all'espressione della forza di Lorentz agente su un sistema dotato di carica e di corrente, portarono alla comprensione della luce come onda elettromagnetica e a padroneggiare i fenomeni legati sia all'emissione di radiazione da parte dalle cariche in moto, sia agli effetti della radiazione stessa sui corpi carichi. A partire dalle equazioni di Maxwell, si poteva inoltre scrivere una equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 ,$$

espressione di una conservazione locale della carica elettrica globale. La teoria di Maxwell del campo elettromagnetico, grazie anche alla sua straordinaria conferma con la scoperta delle onde elettromagnetiche nel 1888, aveva preso il sopravvento rispetto all'idea di corpuscoli di elettricità che aveva dominato tanta parte del XIX secolo. Tuttavia, i misteriosi raggi catodici, noti fin dal 1858, erano destinati a reintrodurre in modo eclatante il concetto di carica elettrica elementare. Gli esperimenti condotti nel 1897 da Emil Wiechert a Königsberg e Joseph John Thomson a Cambridge, confermarono l'esistenza dell'"atomo di elettricità" di Hermann Helmholtz (1881), battezzato elettrone da George Stoney nel 1894. L'elettrone risultava coinvolto in una serie di fenomeni che contribuirono rapidamente a consolidare la sua identità come particella elementare.

Su queste basi nasceva la teoria elettronica della materia, che si proponeva di spiegare le proprietà elettriche e magnetiche di solidi, liquidi, gas a partire dalle leggi note dell'interazione fra i campi e gli elettroni contenuti negli atomi (visione elettromagnetica del mondo). Quando Hendrik Antoon Lorentz riesce a spiegare nel 1897 il fenomeno dello *splitting* delle linee spettrali di un atomo posto in un campo magnetico, appena individua-

to da Pieter Zeeman, con la sua teoria dell'elettrone, questa particella inizia la sua carriera in fisica. Sarà destinata a giocare un ruolo fondamentale nel rendere conto di una serie di fenomeni elettrici, magnetici e termici della materia, osservati nel corso del secolo XIX (conduttività elettrica e termica e loro dipendenza dalla temperatura con o senza la presenza di campi elettrici e magnetici esterni, proprietà dia-, para- e ferromagnetiche, o altre trovate successivamente, come la superconduttività).

L'interazione tra campi ed elettroni risultava essere alla base delle proprietà elettriche e magnetiche della materia. Proprio la necessità di spiegare la capacità di emettere e assorbire radiazione solo per certe lunghezze d'onda caratteristiche aveva aperto un programma di ricerca, che avrebbe spiegato con successo le "righe spettrali" caratteristiche di ciascun elemento, mettendo in rapporto la struttura quantistica degli atomi con l'elettrodinamica classica alla Maxwell.

Per molto tempo l'elettrone sarebbe stato considerato l'*atomo* di elettricità negativa. Tuttavia, molto presto era nato il problema della sua struttura: aveva delle dimensioni o doveva essere pensato puntiforme? Questo caso incontrava una difficoltà insormontabile: il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme ha un'energia infinita. Sarebbe stato questo solo il primo esempio degli "infiniti" che avrebbero perseguitato a lungo l'elettrodinamica. Molto presto l'elettrone, come particella relativistica, aveva ricevuto le attenzioni di Abraham, Lorentz e Poincaré. Ma nel frattempo era comparso sulla scena Einstein, che seguiva una linea di pensiero del tutto personale e lontana dal dibattito in corso. Questo filo lo porterà non soltanto a ridiscutere i concetti classici di spazio e di tempo, ma a riflettere a fondo sugli aspetti quantistici dei fenomeni atomici, relativi alle implicazioni del lavoro di Planck del 1900 sulla radiazione di corpo nero.

Come è noto, la teoria della relatività speciale, una teoria dalla forma completa e definita, che a tutti gli effetti aveva sostituito le vecchie fondamenta della fisica classica, incontrò grande favore presso la maggior parte della comunità scientifica, a cominciare da Planck, che per primo applicò la relatività alla teoria dei quanti.

Il tentativo di applicare il sistema di equazioni di Maxwell alla radiazione atomica fu ostacolato da due problemi: la densità di carica e le correnti all'interno degli atomi erano sconosciute. Inoltre, una difficoltà fondamentale sorgeva anche quando si tentava di applicare la teoria statistica del calore al campo di radiazione. Aderendo strettamente a concetti ondulatori, Lord Rayleigh e J.H. Jeans contarono il numero di modi delle vibrazioni trasversali in una cavità di volume V e nell'intervallo di frequenza dv , ottenendo

$$N_v dv = \frac{8\pi V}{c^3} v^2 dv. \text{ Se si suppone, seguendo la teoria cinetica classica, di applicare la legge}$$

di equipartizione dell'energia, attribuendo a ciascun grado di libertà un'energia $kT/2$, ciascun modo della cavità (indipendentemente dalla frequenza) avrà un'energia media corrispondente a kT . L'energia per unità di volume nell'intervallo di frequenza dv della radiazione all'interno della cavità a temperatura T sarà quindi il prodotto dell'energia media per ciascun modo per il numero di modi compreso nell'intervallo di frequenza, diviso per il

$$\text{volume della cavità: } \rho(v, T) dv = kT \cdot N_v dv = \frac{8\pi kT}{c^3} v^2 dv. \text{ } ^2 \text{ Secondo la formula di Rayleigh-Jeans}$$

per la radiazione di corpo nero, la densità totale di energia diventa infinita all'aumentare della frequenza. Tuttavia, la "catastrofe ultravioletta" prevista da tale teoria risultava del tutto in contraddizione con l'esperienza.³

All'epoca, la teoria classica della luce non riusciva a spiegare in alcun modo l'esperienza comunemente osservata secondo cui la materia incandescente cambia colore al crescere della temperatura, passando dal rosso al giallo e poi al bianco.

Il 27 aprile del 1900 Lord Kelvin tenne una conferenza alla *Royal Institution* il cui titolo era: *Nineteenth-Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light*. Secondo Kelvin la "bellezza e la chiarezza della teoria" era oscurata da "due nubi". Si riferiva al risul-

tato negativo dell'esperimento di Michelson e Morley, che aveva lo scopo di verificare l'esistenza di un "vento d'etere", e ai problemi della radiazione di corpo nero. In effetti queste due nubi avrebbero segnato l'avvento di una vera e propria rivoluzione nella fisica teorica, con l'emergere della relatività einsteiniana e della teoria dei quanti.

Questa teoria si sviluppò nel primo quarto di secolo a partire dal lavoro di Planck del 1900, che, analizzando a fondo il problema della radiazione di corpo nero a partire da concetti elettromagnetici e termodinamici, iniziò a chiarirne la natura attraverso l'introduzione del concetto di "quanti di energia" del tipo $\varepsilon = h\nu$.

Va sottolineato che, mentre l'assimilazione della relatività ristretta fu un processo relativamente rapido e tranquillo, la "vecchia" teoria dei quanti, sviluppatasi negli anni tra il 1900 e il 1925, non era caratterizzata dalle stesse basi di principio. Vi furono quindi profonde differenze tra le evoluzioni di queste due teorie. In effetti, come osserva Pais, "molto tempo prima che si capisse quali erano i principi della teoria dei quanti", furono i successi di alcune equazioni a rendere evidente che "una teoria del genere doveva pur esistere" [Pais 1991, p. 43]. Queste equazioni pionieristiche costituiscono la migliore evidenza dei primi passi concreti verso il rovesciamento dei sacri concetti classici. La prima, in ordine cronologico, è appunto la formula di Planck, che esprime la densità spettrale ρ della radiazione del corpo nero in equilibrio termico in funzione della frequenza ν e della temperatura:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} .$$

La seconda equazione, dedotta da Einstein nel 1905, fornisce una espressione per l'energia E dei fotoelettroni liberati da una superficie metallica irradiata da luce di frequenza ν ; si tratta della prima equazione della teoria quantistica dell'interazione fra radiazione e materia:

$$E = h\nu - P .$$

La terza equazione, la prima della teoria quantistica dello stato solido, fu quella dedotta da Einstein per il calore specifico di un grammoatomo di un solido cristallino ideale i cui punti reticolari vibrino tutti di moto armonico, con un'unica frequenza ν , attorno alle rispettive posizioni di equilibrio:

$$c_\nu = 3R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT) - 1]^2} .$$

L'ultima formula, ottenuta da Niels Bohr nel 1913, inaugura la grande stagione della teoria quantistica della struttura atomica:

$$\text{Costante di Rydberg} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3 c} .$$

Un aneddoto può servire a ricordare che, al suo esordio, anche la teoria di Bohr non fu affatto accolta con facilità. L'idea era tanto nuova e del tutto inusuale che nel 1914 Max von Laue e Otto Stern fecero voto di rinunciare alla fisica se le idee di Bohr sull'atomo di idrogeno si fossero rivelate corrette [Weisskopf 1983, p. 58]. Fortunatamente non mantennero il loro giuramento.

Gli aspetti fondazionali della fisica nel corso della prima metà del XX secolo riguarderanno principalmente la caratterizzazione dei costituenti "elementari" della materia e la chiarificazione della natura della struttura spazio-temporale in cui hanno luogo le interazioni. La scoperta dell'elettrone, la precisa determinazione della sua carica da parte di Millikan,⁴ la dimostrazione della plausibilità del modello dell'atomo nucleare di Rutherford, l'ipotesi del quanto di luce di Einstein e la spiegazione di Bohr dello spettro dell'idrogeno rappresentano alcune delle svolte cruciali di questa storia.

Questi sforzi culmineranno a metà degli anni venti con la formulazione della "nuova" meccanica quantistica da parte di Born, Heisenberg, Jordan, Dirac e Schrödinger.

Gli avvenimenti rivoluzionari che caratterizzarono il periodo dal 1925 al 1927 scaturirono dalla confluenza di una comprensione a livello teorico (descrizione della dinamica di particelle microscopiche da parte della nuova meccanica quantistica) e dalla percezione di una ontologia approssimativamente stabile (elettroni e nuclei). Queste entità potevano essere considerate elementari, oggetti puntiformi specificati da massa, spin e statistica,⁵ e da proprietà elettromagnetiche come la carica e il momento magnetico.

La costante di Planck aveva creato una gerarchia nel mondo: il dominio macroscopico e quello microscopico. La meccanica quantistica descriveva correttamente quel dominio della natura definito dalla costante h di Planck: qualsiasi sistema la cui lunghezza caratteristica l , massa m e tempo t , sono tali che il prodotto ml^2/t è dell'ordine di h , e tale che l/t sia molto inferiore rispetto a c , è quantomeccanico e doveva essere quindi descritto dalla nuova meccanica *non relativistica*. Sembrava quindi che restasse solo da inserire nella teoria le idee relativistiche. Affrontare il problema di una descrizione delle proprietà quantistiche e meccaniche associate all'interazione della radiazione elettromagnetica con la materia si sarebbe rivelato ben più arduo di quanto fosse immaginabile. Le basi per la formulazione di una teoria completa e matematizzata che consentisse di fare calcoli relativi all'assorbimento ed emissione di luce da parte degli atomi, insieme a previsioni sul risultato delle interazioni tra "quanti di luce" e particelle cariche come gli elettroni, furono poste concretamente da Einstein nel 1905 con la sua "ipotesi del quanto di luce". L'idea della natura duale della luce, dotata sia di proprietà corpuscolari sia ondulatorie, porterà a riconoscere che l'elettromagnetismo è il risultato del comportamento quantistico del fotone, la "particella" responsabile della trasmissione di radiazione elettromagnetica.

Secondo quanto prescritto dalla nuova meccanica quantistica, in un istante che non può essere previsto un atomo eccitato fa una transizione al suo stato fondamentale emettendo un fotone. Dov'era il fotone prima della transizione? In nessun luogo; è stato creato al momento della transizione. Un atomo assorbe un fotone e va in uno stato eccitato. Dove si trova il fotone dopo l'assorbimento? In nessun luogo; si è estinto, annichilato. La teoria quantistica dei campi, in grado di descrivere simultaneamente il comportamento del campo elettromagnetico e il moto di tutti i tipi di particelle in conformità con i principi della meccanica quantistica, si sviluppa come un quadro teorico in grado di affrontare questo tipo di domande estendendolo in generale a particelle qualsiasi. È una combinazione di meccanica quantistica e relatività speciale; il suo ingrediente fisico fondamentale – il campo quantico – riunisce in sé due nozioni fondamentali della fisica classica (e della fisica quantistica non relativistica): particelle e campi. Per descrivere come le particelle vengano create o svaniscano è necessario un linguaggio specifico, una tecnica per calcolare le probabilità di creazione, annichilazione o *scattering* di ogni tipo di particelle: fotoni, elettroni, positroni, protoni, mesoni. L'elettrodinamica quantistica, la teoria delle interazioni tra campi quantici di radiazione (fotoni) e campi quantici di Dirac (elettroni e positroni), è la forma più antica di teoria dei campi. Come vedremo, questa teoria scaturisce dal cuore stesso della nuova meccanica quantistica, ma le sue radici si possono far risalire alla vecchia teoria dei quanti. Tuttavia, per comprenderne l'evoluzione nella sua fase iniziale, è opportuno richiamare le basi concettuali poste da Einstein in una serie di lavori pubblicati a partire dal 1905, lavori che scaturiscono dalla riflessione sul concetto di emissione e assorbimento dei quanti, un concetto che assumerà un ruolo centrale nella formulazione della teoria, accanto alle intuizioni derivate dalla teoria quantistica del campo elettromagnetico.

Emissione e assorbimento di radiazione secondo Einstein

Nel lavoro "Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce" pubblicato nel marzo del 1905, da lui stesso ritenuto rivoluzionario, Einstein riflette sulla natura della radiazione elettromagnetica [Einstein 1905]:

Fra le descrizioni teoriche che i fisici si sono formati dei gas e di altri corpi ponderabili, e la teoria di Maxwell dei processi elettromagnetici nel cosiddetto spazio vuoto, vi è una profonda differenza formale... lo stato di un corpo è completamente determinato da posizione e velocità di un numero finito, anche se grandissimo, di atomi ed elettroni, mentre per la determinazione dello stato elettromagnetico di uno spazio si utilizzano funzioni spaziali continue... Secondo la teoria di Maxwell, in tutti i fenomeni puramente elettromagnetici, e quindi anche nel caso della luce, l'energia dev'essere concepita come una funzione spaziale continua, mentre, secondo la concezione attuale dei fisici, l'energia di un corpo ponderabile dev'essere rappresentata come una somma estesa agli atomi e agli elettroni. L'energia di un corpo ponderabile non può suddividersi in parti arbitrariamente numerose e arbitrariamente piccole, mentre secondo la teoria di Maxwell (o più in generale secondo ogni teoria ondulatoria) l'energia di un raggio luminoso emesso da una sorgente di luce puntiforme si distribuisce con continuità su un volume via via crescente... A me sembra in effetti che le osservazioni [radiazione corpo nero, fotoluminescenza, raggi catodici] concernenti la generazione o la trasformazione della luce appaiano più comprensibili nell'ipotesi di una distribuzione spaziale discontinua dell'energia luminosa. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza. (Berna, 17 marzo 1905)

Einstein sceglie di non partire dalla legge di Planck e segue un ragionamento di carattere fenomenologico, basato sulla validità sperimentale della legge di Wien (regime delle alte frequenze) che lo conduce ad affermare che "Una radiazione monocromatica di bassa densità, cioè nei limiti di validità della legge di Wien, si comporta nell'ambito della termodinamica come se consistesse in quanti di energia di grandezza $R\beta v/N$ [$R\beta v/N = h\nu$] indipendenti tra loro". Subito dopo Einstein enuncia il suo *principio euristico*:

Se una radiazione monocromatica (di densità sufficientemente bassa) si comporta, rispetto alla relazione entropia-volume, come un mezzo discreto, formato da quanti di energia di grandezza $R\beta v/N$, è naturale chiedersi se le leggi di emissione e di trasformazione della luce non siano anch'esse strutturate come se la luce consistesse di quanti di energia di questo tipo.

Come osserva Pais "l'ipotesi del quanto di luce era un'asserzione su una proprietà quantistica della radiazione elettromagnetica libera; il principio euristico era un'estensione di tale proprietà della luce all'*interazione fra luce e materia*" (corsivo mio) [Pais 1991, p. 403]. Un primo passo rivoluzionario nella nostra storia.

L'anno successivo, nel lavoro "La teoria della generazione e dell'assorbimento della luce", Einstein afferma esplicitamente che la teoria di Planck *contiene* l'ipotesi dei quanti di luce:

In un lavoro comparso l'anno scorso ho mostrato che la teoria di Maxwell sull'elettricità, insieme con la teoria dell'elettrone, conduce a risultati che sono in contraddizione con le esperienze sulla radiazione di corpo nero... Mi pareva allora che la teoria di Planck costituisse, per certi versi, un riscontro del mio lavoro. Tuttavia nuove considerazioni... mi hanno rivelato che il fondamento di quella teoria differisce da quello che risulterebbe dalla teoria di Maxwell e dalla teoria dell'elettrone, e precisamente in quanto essa fa implicitamente uso dell'ipotesi dei quanti di luce... Ritengo che le riflessioni precedenti... sembrano indicare che, nella sua teoria, Planck ha introdotto nella fisica un nuovo elemento ipotetico: l'ipotesi dei quanti di luce. (Berna, marzo 1906)

Nel proporre di considerare valida l'equazione di Planck per l'equilibrio comune di materia e radiazione anche nella teoria quantistica, Einstein ipotizza del tutto correttamente le proprietà essenziali di un oscillatore materiale quantomeccanico e il suo comportamento nelle transizioni radiative:

Dobbiamo considerare alla base della teoria della radiazione di Planck il seguente teorema: l'energia di un oscillatore elementare può assumere soltanto valori che siano multipli interi di $h\nu$; essa varia a salti per assorbimento ed emissione di multipli interi di $h\nu$ [Einstein 1906].

Planck prese inequivocabilmente posizione contro i quanti di luce e non fu convinto dell'argomento di Einstein sulla compatibilità delle descrizioni ondulatoria e corpuscolare perché l'ipotesi dei fotoni gli sembrava comunque in contraddizione con le equazioni di Maxwell. Se pensiamo alla controversia di fine Ottocento sulla realtà dell'atomismo, che aveva provocato in particolare da parte di Boltzmann il riconoscimento di una irrisolta contrapposizione tra atomicità e continuità, certamente possiamo dire che altri fisici dell'epoca fossero consapevoli del dualismo particella-campo. Già nel 1906 Ehrenfest, nel commentare la teoria di Planck, discute lo spettro di equilibrio termico attraverso l'analisi dei modi normali di Rayleigh-Jeans.⁶ Nel rappresentare la radiazione in una cavità attraverso un insieme di modi stazionari, formalmente analogo a un insieme di oscillatori armonici. Ma l'equipartizione classica dell'energia porta allo spettro di Rayleigh-Jeans.⁷ Come si può dunque modificare la teoria per ottenere lo spettro di Planck? Una possibilità, secondo Ehrenfest, è suggerita dalla quantizzazione di Planck degli oscillatori materiali: la quantità di energia del campo contenuta in ciascun modo normale di frequenza ν può essere solo un multiplo intero di $h\nu$. La stessa assunzione consentì poi a Debye di derivare lo spettro di Planck nel 1910 [Debye 1910]. Applicando i risultati di Einstein a un insieme di oscillatori disaccoppiati che rappresentavano le vibrazioni del campo elettromagnetico in una cavità, Debye introdusse la prescrizione che le sole energie permesse per un oscillatore caratterizzato da una frequenza propria ν fossero date da $E_\nu = nh\nu$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. Partendo da questa assunzione fu in grado di derivare in poche righe la legge di Planck [Pais 1991, p. 353]. Tuttavia, né Ehrenfest, né Debye fecero alcuna connessione tra la loro rappresentazione della radiazione e il quanto di luce di Einstein. Secondo Debye non vi era alcuna necessità di spiegare i vincoli sull'energia (quantizzazione) facendo appello a una ipotetica natura corpuscolare della radiazione.

Come sappiamo, la quantizzazione del campo di energia risulta dal considerare gli aspetti corpuscolari del sistema. Tuttavia, questa connessione con l'ipotesi del quanto di luce di Einstein rimase a lungo oscura, anche a causa della generale ostilità verso la linea di pensiero di Einstein. Soltanto più tardi, una volta compreso il dualismo onda-corpuscolo dopo l'avvento della meccanica ondulatoria, la teoria di Debye apparve equivalente alla statistica di Bose di un gas di fotoni [Bose 1924].

Per un certo tempo, dunque, Einstein fu il solo a richiamare con forza l'attenzione sulla coesistenza nella luce di aspetti ondulatori e corpuscolari.

Nel 1908 Einstein tornò ad interessarsi profondamente alla radiazione, come testimonia una lettera scritta a Laub: "Sono permanentemente al lavoro attorno al problema della costituzione della radiazione ... Tale problema quantistico è così straordinariamente importante e difficile che dovrebbe essere al centro delle preoccupazioni di tutti" [Pais 1991, p. 427]. Il lavoro "Lo stato attuale del problema della radiazione", un intervento presentato da Einstein al Congresso degli scienziati tedeschi tenuto a Salisburgo nel settembre del 1908, rappresenta una svolta decisiva nella posizione di Einstein riguardo la relazione tra aspetti continui e aspetti discontinui della radiazione [Einstein 1909].

In questo lavoro Einstein afferma che non è sufficiente assumere con Planck che l'emissione e l'assorbimento di energia avvenga per multipli di $h\nu$, ma bisogna assumere che l'energia raggiante esista *solo* in multipli di $h\nu$.

Per sostenere questa affermazione Einstein prese in considerazione le fluttuazioni di energia della radiazione di corpo nero. L'energia di un sistema in equilibrio alla temperatura T non è esattamente fissata. Data una cavità che racchiuda radiazione di corpo nero alla temperatura T costante, accade che l'energia di una radiazione quasi monocromatica

si distribuisca mediamente nel tempo in modo uniforme. Ci si deve aspettare tuttavia che l'energia di radiazione E , di frequenza tra ν e $\nu + d\nu$ contenuta in un piccolo volume parziale V , sia soggetta a variazioni istantanee rispetto al suo valore medio $\langle E \rangle$. Sulla base di considerazioni termodinamiche Einstein trovò che la corrispondente fluttuazione quadratica media dell'energia risultava

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = kT^2 V d\nu \frac{\partial \rho}{\partial T}.$$

Utilizzando la legge di Planck per esprimere la densità monocromatica di energia $\rho(\nu, t)$ e sviluppando la precedente formula trovò la somma di due termini del tipo:

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad \frac{1}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}.$$

Ricompattando e reinserendo la densità spettrale di energia $\rho(\nu, t)$ trovò che lo scarto quadratico medio delle fluttuazioni dell'energia di una radiazione in equilibrio termico in una cavità alla temperatura T risultava composta da due termini, ciascuno dei quali era spiegabile nell'ambito di una teoria esclusivamente ondulatoria o di una teoria esclusivamente corpuscolare della radiazione

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \left[(h\nu)\rho + \left(\frac{c^3}{8\pi\nu^2} \right) \rho^2 \right] V d\nu.$$

Se infatti nel calcolo di $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ anziché la formula di Planck si fosse impiegata quella di

Rayleigh-Jeans, che descrive la radiazione elettromagnetica nel regime delle basse frequenze ($\nu \rightarrow 0$, ovvero piccoli valori di $h\nu/kT$), si sarebbe ottenuto solo il termine quadratico della formula; se si fosse, invece, impiegata quella di Wien ($\nu \rightarrow \infty$ ovvero grandi valori di $h\nu/kT$), si sarebbe ottenuto solo il termine lineare ρ . La radiazione può essere dunque descritta in termini esclusivamente corpuscolari o esclusivamente ondulatori soltanto nei casi limite. I due termini normalmente sono sempre presenti e la somma dei due contributi dimostra che l'ipotesi dell'esistenza dei fotoni non solo non è in contrasto con la legge di Planck, ma anzi è da essa richiesta.

La formula implica ben di più: *l'idea della coesistenza nella radiazione di aspetti interpretabili con la teoria ondulatoria, insieme ad aspetti interpretabili con la teoria corpuscolare della luce*. Infatti Einstein sottolineò che "L'attuale teoria della radiazione è incompatibile con tale risultato". In effetti la teoria ondulatoria classica porterebbe solo al secondo termine dell'equazione. Riguardo il primo termine Einstein precisò: "Se ci fosse solo quello, darebbe luogo a fluttuazioni nel caso in cui la radiazione consistesse di quanti puntiformi di energia $h\nu$, che si muovessero in modo indipendente". Pais commenta a questo punto la comparsa della parola "puntiformi" notando che, benché Einstein non facesse riferimento esplicito a "particelle", "era chiaramente in questo modo che ora pensava ai quanti", come appare chiaro da una lettera scritta a Sommerfeld nel settembre del 1909, nella quale parla del "disporsi dell'energia luminosa attorno a punti discreti che si muovono alla velocità della luce" [Pais 1991, p. 429].

Nel 1909 la posizione di Einstein riguardo lo stato della teoria della radiazione è dunque assai chiara [Einstein 1909b]:

Ho già cercato in precedenza di mostrare che le basi attuali della teoria della radiazione vanno abbandonate... È mia convinzione che la prossima fase di sviluppo della fisica teorica ci condurrà a una concezione della luce che potrà essere interpretata come una sorta di fusione della teoria ondulatoria e di quella dell'emissione⁸... La struttura ondulatoria e quella quantistica... non vanno considerate mutuamente incompatibili...

L'universo semiclassico

Prima della teoria atomica di Bohr del 1913 e durante i primi dieci anni di vita di quest'ultima, i fisici continuarono a trattare i sistemi fisici affidandosi alle abituali immagini dello spazio e del tempo della fisica classica, estrapolandole ad ogni tipo di materia in moto: gli elettroni si muovono come palle da biliardo e la luce si comporta come le onde in uno stagno.

Quando Bohr formulò nel 1913 la prima teoria dell'atomo di idrogeno si concentrò sulla dinamica degli stati stazionari, e inizialmente mise da parte il problema del meccanismo dettagliato attraverso il quale viene emessa la radiazione che si osserva sotto forma di righe spettrali caratteristiche di ciascuna specie atomica. La cosiddetta "teoria semiclassica" si basava su un atomo quantistico perturbato da un campo esterno, per esempio un'onda elettromagnetica, e tuttavia non riusciva a dar conto dell'emissione spontanea di luce, proprio quella che nella teoria classica risultava prodotta in modo del tutto naturale dal moto delle cariche accelerate. Eppure il modello atomico di Bohr, come osserva Silvio Bergia nella sua biografia di Einstein, "suggeriva fortemente che la transizione tra due livelli dell'atomo di energie E_2 ed E_1 , con emissione di radiazione di frequenza ν data dalla

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} \text{ avvenisse per emissione di un 'quanto di luce' di energia } h\nu \text{ [Bergia 1998, p.}$$

67]. Ma tanto radicata era la fiducia della grande maggioranza dei fisici nella natura esclusivamente ondulatoria della radiazione elettromagnetica che questa interpretazione non fu affatto sostenuta.

La teoria semiclassica rendeva conto delle righe spettrali, anche in dettagli molto sottili, come le intensità delle diverse righe, il perché certe transizioni fra livelli atomici fosse possibili e altre proibite, ecc. L'emissione spontanea in termini quantistici significa che se noi portiamo un atomo a un livello di energia più alto del fondamentale, quello non resta lì in eterno: prima o poi emette un fotone e torna allo stato di energia più bassa. Nella teoria semiclassica ciò non avviene, perché se l'atomo è in uno stato eccitato, ma si trova nel "vuoto", ossia non ci sono campi elettromagnetici prodotti da altre sorgenti, quello stato è "stazionario" e si conserva indefinitamente. Infatti non c'è niente con cui l'atomo possa interagire, e preso a sé la sua energia si conserva.

Questo universo semiclassico, riluttante ad abbandonare la teoria classica della radiazione elettromagnetica, osteggiava fortemente il quanto di luce introdotto da Einstein nel 1905. Molti sostenevano che la fisica non sapeva cosa farsene di quei "pacchetti" di energia elettromagnetica che Einstein aveva svincolato dal semplice meccanismo di emissione e assorbimento di radiazione postulato da Planck. L'analisi statistica della legge di Planck aveva spinto Einstein oltre la quantizzazione degli scambi di energia, verso la quantizzazione della stessa radiazione elettromagnetica. Neanche gli esperimenti di Robert Millikan che si tradussero, nel 1914, nella verifica della legge dell'effetto fotoelettrico, di cui Einstein aveva fornito una spiegazione semplice come applicazione della sua ipotesi del quanto di luce, riuscì a rivestire questa entità di un significato fisico reale. Millikan rifiutò poi per anni di riconoscere la validità della teoria che le sue stesse misure avevano verificato, preferendo ricorrere, per la spiegazione dell'effetto fotoelettrico all'idea che i fotoelettroni fossero emessi già in possesso di un'energia quasi uguale ad $h\nu$.

Molto lunga fu infatti la strada che portò ad attribuire al quanto di luce l'identità di particella, battezzata da Lewis con il nome di fotone nel 1926. La scoperta dell'effetto Compton, che confermava il comportamento corpuscolare della radiazione elettromagnetica, costituì una svolta in questo senso [Stuewer 1975]. Nel marzo del 1923 Compton pubblica i risultati delle sue ricerche, ma nella sua *Nobel Lecture* del 23 maggio 1924, Millikan ancora parlava in questi termini dell'effetto fotoelettrico: "... la validità generale dell'equazione di Einstein [$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - P$] penso sia ormai universalmente ammessa e, in quell'ambito, la realtà dei quanti di luce di Einstein può considerarsi come sperimentalmente stabilita. Sebbene la concezione di quanti di luce localizzati debba ancora essere considerata

come lontana dall'essere stata stabilita". Più avanti Millikan ribadisce: "Si può dire senza esitazione che non è soltanto l'equazione di Einstein ad avere attualmente un successo straordinario, ma anche la sua stessa concezione. E tuttavia, finché non sarà in grado di rendere conto dei fenomeni di interferenza e di altri effetti che fino ad ora sono apparsi irreconciliabili con essa, dobbiamo tenere in sospeso il nostro completo assenso". Nel citare recenti lavori di Duane, Compton, Epstein e Ehrenfest, Millikan si augurava che alla fine queste esperienze avrebbero potuto portare i loro frutti "nel riportare anche l'interferenza sotto il controllo dei quanti di luce localizzati. Ma attualmente il cammino appare oscuro..." [Millikan 1924].

Secondo quanto verificato da Compton il fotone partecipa a processi di collisione seguendo le regole della conservazione dell'energia, dell'impulso e del momento angolare, proprio come se fosse una "biglia". Tuttavia, il "gioco delle biglie" cominciava ad essere messo in discussione da questioni del tipo: "come è fatto un fotone?" e soprattutto: "come fa un atomo eccitato ad emettere un fotone?" In quello stesso anno Louis de Broglie conseguiva il dottorato con una tesi che introduceva l'idea di comportamento ondulatorio anche per le particelle, come gli elettroni. Questa concezione dualistica, sia della materia a livello microscopico sia della radiazione elettromagnetica, sarà al centro della formulazione di una "nuova" teoria dei quanti che sta per fare la sua comparsa ad opera di una nuova generazione di fisici.⁹

Verso una teoria quantica della radiazione

Nel frattempo c'erano stati enormi progressi verso l'interpretazione della fenomenologia atomica attraverso la "vecchia" teoria dei quanti. Ma la teoria di Bohr (e le sue estensioni fatte da Arnold Sommerfeld), fondata su assunzioni che si erano rivelate assai produttive seppure di carattere empirico, non chiariva la natura dell'interazione tra radiazione e materia. Una delle questioni di base da risolvere era quella di individuare quali leggi determinassero le probabilità delle transizioni tra due stati stazionari, giacché la teoria di Bohr si limitava a prescrivere le possibili energie di queste transizioni, senza dir nulla sulle loro intensità. Poiché la maggior parte dell'evidenza empirica proveniva dalla spettroscopia, i problemi connessi all'emissione e assorbimento della luce da parte dei sistemi atomici giocò un ruolo vitale nello sviluppo di queste idee.

Il primo serio tentativo di gettare un ponte tra la teoria quantistica degli stati atomici e la teoria quantistica della radiazione venne tra il 1916 e il 1917, quando Einstein, riflettendo sul significato della legge di Planck per l'emissione di radiazione del corpo nero, fece una discussione fenomenologica sulle transizioni radiative spontanee e indotte e sollevò alcune questioni che rappresentano un punto concreto di partenza della teoria quantistica dei campi.

Nel novembre del 1916 scrive a Besso: "Ho avuto una splendida illuminazione circa l'assorbimento e l'emissione della radiazione". In effetti Einstein, che nel frattempo aveva compiuto lo sforzo gigantesco di formulare la teoria generale della relatività, torna ad approfondire il significato del suo *principio euristico* del 1905, una riflessione che lo conduce a una nuova deduzione della legge di radiazione di Planck. Il suo ragionamento è contenuto in tre articoli, il terzo dei quali compare all'inizio del 1917 [Einstein 1917].

In essi Einstein si basa su ipotesi del tutto generali circa l'interazione tra radiazione e materia, senza fare alcuna ipotesi specifica sulle proprietà intrinseche dei corpi che interagiscono con la radiazione elettromagnetica. Nel terzo lavoro, "La teoria quantica della radiazione", Einstein esordisce come segue:¹⁰

"L'analogia formale tra la curva della distribuzione cromatica della radiazione termica e la legge di distribuzione delle velocità di Maxwell era troppo evidente per poter restare nascosta a lungo. In effetti già Wien, nell'importante lavoro teorico in cui ricavò la sua leg-

ge di spostamento $\rho = v^3 f(v/T)$ fu guidato da questa somiglianza a una determinazione della formula della radiazione su cui ancora si lavora. Com'è noto, egli scoprì la formula $\rho = \alpha v^3 \exp(hv/kT)$, che è ritenuta corretta ancora oggi come legge limite per grandi valori di v/T (formula di Wien). Oggi sappiamo che nessuna analisi che si basi sulla meccanica classica e sull'elettrodinamica può fornire una formula utilizzabile della radiazione, e sappiamo invece che la teoria classica porta necessariamente alla formula di Rayleigh

$$\rho = \frac{k\alpha}{h} v^2 T. \text{ Successivamente, dopo che Planck, nella sua fondamentale ricerca, ebbe}$$

basato la sua formula $\rho = \alpha v^3 \frac{1}{\exp(hv/kT) - 1}$ sull'ipotesi di elementi di energia discreti,

dalla quale si sviluppò in rapida successione la teoria dei quanti, la riflessione di Wien che aveva condotto all'equazione ricadde naturalmente nell'oblio. Ebbene, poco tempo fa ho scoperto un modo di dedurre la formula di Planck (a partire dalla fondamentale ipotesi quantica) che è simile all'analisi originale di Wien [Einstein 1916] e in cui torna utile la relazione fra la curva di Maxwell e la curva della distribuzione cromatica. Questa deduzione è degna di nota non solo per la sua semplicità, ma soprattutto perché sembra fare un po' di luce sul processo, per noi ancora tanto oscuro, dell'emissione e dell'assorbimento della radiazione da parte della materia [Einstein 1917].

Einstein studiò l'equilibrio termico di un gas monoatomico racchiuso in una cavità e interagente con radiazione elettromagnetica, caratterizzata da una densità di energia ρ . Gli scambi di energia tra gas e radiazione avvengono in atti elementari di emissione e assorbimento di radiazione. I sistemi molecolari possiedono un insieme discreto di stati stazionari permessi $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ caratterizzato ciascuno da una energia (interna) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Le molecole del gas, alcune delle quali si trovano in stati eccitati, vengono quindi descritte seguendo "la teoria dei quanti". La distribuzione delle molecole sui vari livelli energetici viene descritta dalla meccanica statistica, uno degli strumenti che Einstein padroneggiava molto a fondo: "Se le molecole di questi tipo appartengono a un gas a temperatura T , la frequenza relativa W_n di uno di questi stati Z_n è data dalla formula $W_n = p_n \exp(-\varepsilon_n/kT)$ corrispondente alla distribuzione canonica degli stati della meccanica statistica".¹¹ Einstein prende in considerazione tre diverse modalità con cui possono avvenire gli scambi energetici: un processo di assorbimento, in seguito al quale una molecola salta ad un livello energetico superiore, e due processi di emissione, un processo *spontaneo* e un processo *stimolato*, durante i quali la molecola emette radiazione perdendo energia e saltando quindi a un livello energetico inferiore.

Einstein considera due stati Z_m e Z_n di una molecola del gas, "permessi nel senso della teoria dei quanti", le cui energie soddisfino la disuguaglianza $\varepsilon_m > \varepsilon_n$; la molecola "sia in grado di passare dallo stato Z_n allo stato Z_m assorbendo l'energia di radiazione $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ ". Viceversa, la molecola può tornare allo stato inferiore rilasciando la stessa quantità di energia. La radiazione assorbita o ceduta dalla molecola nel processo ha una frequenza ν , caratteristica della combinazione di indici m e n considerati.

Einstein formula alcune ipotesi semplici riguardo il suddetto passaggio di stato "trasferendo le condizioni note, secondo la teoria classica, per un risonatore di Planck a quelle ancora sconosciute della teoria dei quanti". Durante il processo di *emissione*, in analogia a un oscillatore classico, una molecola irradia energia di frequenza ν senza essere eccitata da cause esterne; la probabilità dW che ciò avvenga effettivamente nell'intervallo di tempo dt è data da $dW_{m \rightarrow n} = A_{mn} dt$. La costante A_{mn} , afferma Einstein, è caratteristica della combinazione di indici considerata.

Se è presente un campo di radiazione, il processo che fa passare la molecola dallo stato Z_n allo stato Z_m mediante assorbimento dell'energia di radiazione $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, avverrà secondo una "legge di probabilità" che contiene un termine $\rho(\nu)$, dovuto alla presenza di una densità di radiazione di frequenza ν : $dW_{m \rightarrow n} = B_{mn} \rho dt$. Analogamente, la transizione $Z_n \rightarrow Z_m$ che libera l'energia radiante $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, avverrà secondo la legge di probabilità $dW_{m \rightarrow n} = B_{mn} \rho dt$.

Einstein chiama questi processi “cambiamenti di stato per assorbimento di radiazione” (virgolette nell’originale). I coefficienti A_{mn} , B_{mn} , B_{nm} , sono noti rispettivamente come i coefficienti dell’emissione spontanea e dell’emissione e assorbimento indotto. Riguardo i coefficienti Einstein notava: “Le costanti A e B potrebbero essere calcolate direttamente se fossimo in possesso di una elettrodinamica e di una meccanica modificata nel senso dell’ipotesi quantistica”, il che non era ancora possibile.

A questo punto Einstein si chiede quale densità efficace di radiazione si debba avere affinché lo scambio di energia tra radiazione e molecole, governato dalle leggi statistiche suddette, non alteri la distribuzione degli stati delle molecole data dalla formula $W_n = p_n \exp(-\varepsilon_n/kT)$, che fornisce appunto la frequenza relativa degli stati Z_n ed è ricavabile, afferma Einstein, “dal principio di Boltzmann oppure per via puramente termodinamica”. Formula che, sottolinea Einstein, “è espressione della più ampia generalizzazione della legge maxwelliana di distribuzione delle velocità”. All’equilibrio è necessario e sufficiente che, nell’unità di tempo, avvengano mediamente tanti processi elementari sia di assorbimento, sia di emissione spontanea o indotta, quindi, in virtù della suddetta formula e delle relazioni relative ai processi elementari si ottiene l’equazione

$$p_n \exp(-\varepsilon_n / kT) B_{nm} \rho = p_m \exp(-\varepsilon_m / kT) (B_{mn} \rho + A_{mn}) .$$

“Se inoltre – osserva Einstein – com’è da supporre, ρ cresce all’infinito con T , fra le costanti B_{mn} e B_{nm} deve sussistere la relazione $p_n B_{mn} = p_m B_{nm}$.”¹² Otteniamo allora dalla nostra

equazione la seguente condizione per l’equilibrio dinamico: $\rho = \frac{A_{mn} / B_{nm}}{\exp[\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{kT} - 1]}$. Questa è

appunto l’espressione della densità di radiazione in funzione della temperatura secondo la legge di Planck.

Per la legge di spostamento di Wien, – Einstein osservava – segue subito che $A_{mn}/B_{nm} = \alpha v^3$ e soprattutto $\varepsilon_m - \varepsilon_n = hv$ (α e h sono costanti universali). “L’equazione – notava Einstein – costituisce, com’è noto, la seconda regola fondamentale della teoria spettrale di Bohr, della quale, dopo i perfezionamenti di Sommerfeld ed Epstein, si può già dire che fa parte del patrimonio consolidato della nostra scienza”.

Perché le equazioni precedenti per le $dW_{m \leftrightarrow n}$ possano condurre alla legge di Planck, è quindi necessario che le transizioni $m \leftrightarrow n$ siano accompagnate da un singolo quanto di radiazione monocromatica. Il contenuto fisico del ragionamento di Einstein risolve il problema di ottenere la formula della radiazione di Planck partendo da ipotesi generali, valide per tutti i sistemi atomici concordanti con i postulati di Bohr gettando per la prima volta un ponte fra la radiazione del corpo nero e la teoria che spiegava le righe spettrali degli elementi.

Per la prima volta appare l’indicazione che l’interazione nei sistemi atomici coinvolge sempre due stati in modo simmetrico. Nella meccanica classica un agente esterno come la radiazione agisce su un solo stato ben definito e l’effetto dell’azione può essere calcolato in base alle proprietà di questo stato e dell’agente esterno. Nella meccanica quantistica ogni processo è una transizione fra due stati che intervengono simmetricamente nelle leggi di interazione con un agente esterno. Questa proprietà di simmetria, la cui prima indicazione veniva dalla scoperta di Einstein concernente le modalità di transizione nei due sensi, fu uno degli elementi decisivi che successivamente condussero alla formulazione della meccanica delle matrici.

Nel capitolo sul fotone, in particolare nel paragrafo intitolato “Il completamento della descrizione corpuscolare”, Pais esamina un altro notevole risultato derivante dal lavoro di Einstein, “che Einstein stesso considerava di gran lunga più importante della propria deduzione della legge di radiazione: i quanti di luce trasferiscono una quantità di moto $h\nu/c$ ” [Pais 1991, p. 433]. In effetti, a conclusione della parte introduttiva del lavoro sulla “teoria quantica della radiazione” [Einstein 1917], Einstein affermava a proposito dello scambio di energia: “Sorge la domanda: quando assorbe o emette l’energia ε , la molecola riceve un urto?” In base all’elettrodinamica classica, afferma Einstein, quando un corpo emette

energia sotto forma di radiazione riceve un contraccolpo (impulso) pari a ε/c , qualora tutta la radiazione venga emessa nella stessa direzione. Se tuttavia l'emissione avviene tramite un processo simmetrico nello spazio, come per esempio per onde sferiche, non si ha alcun impulso. Questa alternativa si presenta anche nella teoria quantica della radiazione. Il processo elementare di emissione o assorbimento di radiazione può essere concepito come spazialmente orientato, in tutto o in parte, oppure come un processo simmetrico (non orientato). In realtà Einstein dimostra appunto che "si ottiene una teoria non contraddittoria solo se quei processi elementari vengono concepiti come processi completamente orientati". Questo è appunto quello che lui considera il "risultato principale", dell'analisi da lui compiuta ed esposto nella sezione finale intitolata "Il risultato", dove Einstein fa una serie di considerazioni sulle implicazioni teoriche dei nuovi concetti quantitativi riguardo al caso.¹³ I pacchetti di radiazione emessi o assorbiti hanno proprietà direzionali e contrariamente all'affermazione della teoria elettromagnetica classica: "Non esiste emissione di radiazione per onde sferiche. Nel processo elementare di emissione la molecola subisce un contraccolpo di valore $h\nu/c$ in una direzione che, allo stato attuale della teoria, è determinata solo dal 'caso'. Queste proprietà dei processi elementari... fanno apparire quasi inevitabile la costituzione di una vera e propria teoria quantica della radiazione. La debolezza della teoria sta, da una parte, nel fatto che essa non ci porta più vicini a un collegamento con la teoria ondulatoria e, dall'altra, nel fatto che essa lascia al 'caso' l'istante e la direzione dei processi elementari; ciò nonostante io nutro piena fiducia nell'attendibilità della strada intrapresa". Come osserva Pais, Einstein enfatizzò l'imprevedibilità della direzione del rinculo relativa all'emissione spontanea: "Che cosa determina l'istante e la direzione in cui il fotone viene emesso spontaneamente? Che cosa decide in quale direzione andrà?". Interrogativi di questo tipo si erano già presentati nel caso dei processi di decadimento radioattivo, nota ancora Pais, e aggiunge: "Einstein fu il primo a rendersi conto che la probabilità dei processi spontanei di emissione è una grandezza non classica" [Pais 1991, p. 438].

Il carattere casuale dei processi spontanei avrebbe rappresentato una preoccupazione costante per Einstein fino alla fine della sua vita. Tuttavia, questo notevole completamento della descrizione corpuscolare del quanto di luce, a cui si poteva ora attribuire anche una direzionalità, indusse Einstein a considerarlo una entità reale, come appare in una lettera a Besso del 16 settembre 1916: "Con questo, l'esistenza dei quanti di luce è praticamente certa". Due anni più tardi, il 29 luglio 1918, scriveva ancora a Besso: "Sulla realtà dei quanti di radiazione non ho più dubbi, anche se continuo a essere del tutto isolato in questa convinzione". Il *quanto di luce*, introdotto da Einstein nel 1905 come *quanto di energia* che soddisfaceva l'equazione $E = h\nu$, dopo ben dodici anni sta assumendo un'identità particellare a cui è appunto associata una quantità di moto $h\nu/c$ (perfettamente compatibile, peraltro, con il vettore di Poynting). La direzionalità del processo elementare di assorbimento e di emissione restava comunque in aperto contrasto con l'idea classica dell'emissione di un'onda sferica, la quale risultava indispensabile alla comprensione delle proprietà di coerenza della radiazione tipiche dei fenomeni di interferenza.

Né il momento della nascita del *fotone* né la direzione erano prevedibili dagli argomenti di Einstein. L'aleatorietà, che appariva essere intrinsecamente parte della natura quantistica dei processi radiativi, aveva un analogo nell'ambito dei processi tipici dei decadimenti radioattivi: ogni singolo nucleo si disintegra in un momento imprevedibile. Tutto quello che si può dire è che se si osserva un gran numero di nuclei, la velocità media di disintegrazione è proporzionale al numero totale presente. In questi processi la legge classica di causalità appare non avere più valore. Dal lavoro di Einstein discende che la legge della radiazione di Planck poteva essere ridotta a processi di tipo analogo. Considerando due stati stazionari di un atomo Einstein suppone che, trovandosi nello stato eccitato, l'atomo abbia una certa probabilità di ritornare allo stato fondamentale emettendo un fotone di frequenza corrispondente, secondo la legge dei quanti, alla differenza di energia fra i due stati. Cosicché, in un insieme sufficientemente grande di tali atomi, il numero di

atomi che si trovano nello stato eccitato e che ritornano allo stato fondamentale nell'unità di tempo, è proporzionale al loro numero iniziale. Esattamente come per la disintegrazione radioattiva. La radiazione, d'altra parte, ha per effetto quello di indurre che avvenga il processo inverso (il passaggio allo stato eccitato) con una certa probabilità. L'assorbimento indotto di un fotone di frequenza corrispondente alla differenza di energia tra i due stati è proporzionale alla densità di radiazione corrispondente a quella frequenza. Sembra quasi che il campo elettromagnetico sia assorbito se è in risonanza con una frequenza caratteristica dell'atomo; in effetti, nel limite "classico" di numeri quantici molto grandi, la frequenza del campo è quasi uguale a quella di rotazione dell'elettrone nello stato iniziale, come notò Bohr con il principio di corrispondenza. I due processi si bilanciano reciprocamente, ma presi da soli *non porterebbero alla formula di Planck*. Einstein è quindi costretto a introdurre un terzo, cioè l'influenza della radiazione sul processo di emissione. Il passaggio dallo stato a uno stato di energia inferiore può essere stimolato dalla radiazione presente e avviene anch'esso con una probabilità proporzionale alla densità di radiazione corrispondente alla frequenza relativa alla differenza di energia tra i due stati. Questo lavoro rappresentò quindi un passo decisivo nella direzione del ragionamento indeterministico, estendendo il ragionamento statistico dalla radioattività in altri campi della fisica. Einstein pensò che fossero proprietà strutturali a determinare nell'atomo eccitato il momento esatto dell'emissione e che fosse necessario ricorrere alla probabilità solo a causa della incompleta conoscenza dei processi sottostanti.

A lui sembrò una debolezza, ma in effetti la forza della meccanica quantistica risiede nel fatto che gli eventi individuali non obbediscono al principio classico di causalità. Questo divenne chiaro più tardi, quando Heisenberg e Schrödinger formularono, nelle parole stesse di Einstein, "una meccanica modificata nel senso dell'ipotesi quantistica". In ogni caso Einstein non digerì mai questa visione probabilistica e la mancanza di causalità nei singoli eventi di emissione e considerò provvisori e incompleti i risultati del lavoro compiuto nel 1916: "Le proprietà dei processi elementari... appaiono rendere inevitabile la formulazione di una *vera* teoria quantistica della radiazione" [Einstein 1917].

A conclusione dell'esame di questo fondamentale lavoro di Einstein è doveroso osservare che, al momento, nessuno, nemmeno Einstein stesso, si rese conto dell'incredibile potenziale contenuto nel concetto di emissione stimolata. Soltanto negli anni '50 del Novecento, la teoria venne elaborata da Charles Townes e Arthur Schawlow e successivamente applicata alla costruzione del LASER, un acronimo derivante appunto dalle iniziali delle parole "Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation",¹⁴ un chiaro legame con il lavoro pionieristico di Einstein.

Ancora l'elettrone secondo Bohr

Nonostante la teoria di Bohr del 1913 ponesse dei vincoli alla meccanica classica, la necessità di una visualizzazione si traduceva nell'enfatizzare che i simboli matematici della meccanica classica permettevano di immaginare l'atomo come un minuscolo sistema copernicano. Una opportuna quantizzazione delle leggi della meccanica classica è utilizzata da Bohr per calcolare le orbite permesse per l'elettrone, gli stati stazionari. E tuttavia la meccanica classica non è in grado di rappresentare o visualizzare l'elettrone in transito lungo tali orbite. L'elettrone si comporta come quello che gli inglesi chiamano il "gatto del Cheshire", perché il salto quantico, la "discontinuità essenziale", non è visualizzabile.¹⁵ L'elettrodinamica classica non è inoltre in grado di rendere minimamente conto di una qualsiasi caratteristica relativa alla radiazione emessa nel corso della transizione. Nel 1918 Bohr propose un metodo per estendere l'elettrodinamica classica nel dominio atomico per mezzo di quello che nel 1920 avrebbe chiamato "principio di corrispondenza".

Nel 1921 Bohr propone una teoria della tavola periodica degli elementi [Bohr 1922] confermata dalla scoperta dell'afnio (Hf) nel dicembre 1922. Ma la teoria di Bohr-Som-

merfeld si stava dimostrando sempre più inadeguata. Verso il 1923 l'immagine di un atomo planetario cominciava a traballare fortemente, non soltanto per l'inadeguatezza ad affrontare atomi più complessi di quello di idrogeno, ma anche perché la teoria veniva messa in seria difficoltà quando si considerava l'interazione tra atomi e luce, come riconobbe lo stesso Bohr nel 1923 [Bohr, 1923]. Il nodo fondamentale stava nella difficoltà di riconciliare le discontinuità essenziali della fisica atomica con la intrinseca continuità dell'elettrodinamica classica. La critica principale contro l'immagine del quanto di luce di Einstein risiedeva proprio nella impossibilità di spiegare il fenomeno dell'interferenza e tuttavia la sua innegabile utilità nella spiegazione di certi fenomeni rinforzava le convinzioni di Bohr che una descrizione priva di contraddizioni dei processi atomici non poteva essere raggiunta attraverso "l'uso di concezioni prese in prestito dall'elettrodinamica classica". Poiché le leggi di conservazione della fisica classica sono legate alla descrizione di uno spazio-tempo continuo, allora queste leggi potrebbero "non possedere validità illimitata". La sua guida nel dominio atomico restava il principio di corrispondenza, che gli avrebbe permesso di "fare assunzioni del tutto esterne alla teoria quantistica". Una di queste era il meccanismo di accoppiamento che aveva radici nel lavoro di Ehrenfest del 1906 [Ehrenfest 1906], e di Debye del 1910 [Debye 1910] che discuteva la radiazione in una cavità e la legge di Planck usando il metodo di quantizzazione dei modi normali proposto da Rayleigh e Jeans.¹⁶ L'analogia formale tra descrizione matematica dei modi normali di un campo d'onda e gli oscillatori si traduceva nella quantizzazione dell'energia dei modi normali del campo di radiazione in multipli interi di $h\nu$, dove ν era la frequenza di un modo normale. Bohr propose che tale meccanismo fosse attivato quando un atomo viene illuminato da luce contenente frequenze capaci di indurre transizioni tra stati stazionari. L'atomo risponde alla radiazione come un certo numero di oscillatori classici, ciascuno dei quali oscilla con frequenza di una transizione quantistica. La probabilità dello scambio di energia viene calcolata combinando il meccanismo di accoppiamento con il principio di corrispondenza. In questo modo i coefficienti A di Einstein per l'emissione spontanea fanno il loro ingresso nella fisica atomica e tuttavia tutto ciò consentiva a Bohr di fare a meno della "cosiddetta ipotesi dei quanti di luce".

Nella sua Nobel Lecture del 1922 Bohr affermava che "Nonostante il suo valore euristico l'ipotesi dei quanti di luce, che è del tutto irconciliabile con i cosiddetti fenomeni di interferenza, non è in grado di far luce sulla natura della radiazione".

Le ricerche di Einstein sulle fluttuazioni dell'energia e dell'impulso nel campo di radiazione, in cui aveva individuato nella formula dell'irraggiamento di Planck i contributi delle particelle e delle onde luminose, avevano posto le basi concettuali della dualità della luce. Tuttavia la loro portata non fu ben valutata da quanti continuarono a discutere la formula dell'irraggiamento. Un notevole impulso chiarificatore venne dal lavoro del fisico indiano N. S. Bose, respinto dal *Philosophical Magazine* ma tradotto e inviato dallo stesso Einstein allo *Zeitschrift für Physik*, dove fu pubblicato nel luglio del 1924. Bose ricavava la formula dell'irraggiamento di Planck usando soltanto l'ipotesi del quanto di luce e la meccanica statistica [Bose 1924].¹⁷ Fino ad allora tutte le dimostrazioni avevano fatto ricorso all'elettrodinamica classica.¹⁸ L'idea di una profonda analogia tra radiazione e materia spinge ad una generalizzazione Einstein che applicò così il conteggio di Bose alle molecole di un gas [Einstein 1924]. Nel frattempo lesse la tesi di dottorato di Louis de Broglie, inviatagli da Paul Langevin. Nel gennaio del 1925 Einstein dimostrò che un gas le cui particelle seguano la statistica di Bose manifesta fluttuazioni in cui si ritrovano contributi corpuscolari e ondulatori. In questa occasione Einstein menzionò la rappresentazione ondulatoria di de Broglie – che aveva subito considerato con grande favore – contribuendo ad attirare l'attenzione generale sull'idea delle onde di materia [Einstein 1925]. Dal lavoro di Einstein emergeva chiaramente che sia le particelle materiali, sia la luce, obbediscono alla statistica di Bose. Successivamente, questo particolare modo di numerare i microstati nel caso di particelle non distinguibili divenne noto come *statistica di Bose-Einstein*.

Gli oscillatori virtuali e la non conservazione dell'energia nell'effetto Compton

Nel 1924 il meccanismo di accoppiamento fornì a Bohr, Kramers e Slater un modo per evitare di interpretare l'effetto Compton in termini di quanti di luce [Bohr Kramers Slater 1924]. Secondo Bohr la tensione tra le due concezioni della luce si sarebbe dovuta risolvere sulla base della teoria ondulatoria. Nonostante le discontinuità essenziali della fisica atomica, l'"intuizione comune" (*Anschauung*) richiedeva che la luce fosse un fenomeno ondulatorio. Di fatto la maggior parte dei fisici teorici erano dell'opinione che la tradizionale descrizione continua del campo di radiazione dovesse essere ad ogni costo salvaguardata. Bohr, e con lui Kramers e Slater, erano i rappresentanti di una posizione estrema, secondo cui "gli enigmi quantistici relativi alla radiazione avrebbero finito per essere risolti grazie a una revisione delle proprietà dell'interazione fra materia e radiazione" [Pais 1991, p. 444].¹⁹ Gli autori della teoria BKS postulavano che l'atomo potesse essere considerato un conglomerato di oscillatori reali e virtuali. Gli oscillatori virtuali avevano la funzione di produrre un campo di radiazione virtuale che permeava tutto lo spazio. La luce sarebbe stata emessa e assorbita a seconda dell'ampiezza del campo di radiazione al momento dell'interazione. Secondo la teoria BKS la causa dei processi radiativi "non va ricercata in una qualche deviazione dalla teoria elettrodinamica della luce per quanto riguarda le leggi di propagazione nello spazio libero, ma nelle peculiarità dell'interazione fra il campo virtuale di radiazione e gli atomi irradiati". Inoltre suppongono che nel corso di una transizione da un livello energetico più alto a uno più basso, durante il quale un atomo emette radiazione, l'energia sia di due tipi: "l'energia del campo, variabile con continuità, e l'energia dell'atomo, variabile in modo discontinuo" [Slater 1925].

Per escludere i quanti di luce – preservando sia la continuità del campo sia la quantizzazione della materia (ciascuna confinata nel suo dominio) – Bohr Kramers e Slater rinunciarono alla conservazione dell'energia per i singoli processi elementari: "Per quanto riguarda il verificarsi delle transizioni, che è la caratteristica essenziale della teoria dei quanti, rinunciamo... a una rigorosa applicazione dei principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto". Le leggi di conservazione, ipotizzavano, sarebbero state valide soltanto in senso statistico, come una media su un gran numero di processi. Oltre ad emettere radiazione reale sotto forma di onde sferiche in risposta alla radiazione incidente, assumevano che gli oscillatori del meccanismo di accoppiamento emettessero un campo destinato soltanto a rendere conto della probabilità di indurre transizioni verso l'alto in un altro atomo, senza che nell'atomo sorgente ci fosse una corrispondente transizione verso il basso, violando così la conservazione dell'energia e la causalità nei processi individuali.²⁰ In questo modo BKS cercarono di riconciliare le transizioni atomiche discontinue con il campo di radiazione continuo. La risposta di BKS all'interrogativo posto dal lavoro di Einstein del 1917 - "Come fa un elettrone a sapere quando emettere radiazione mentre compie una transizione spontanea?" era che non esistono emissioni veramente spontanee. Associando all'atomo in un determinato stato un "campo di radiazione virtuale", contenente tutte le possibili frequenze di transizione agli altri stati stazionari, BKS supposero che le transizioni fossero "indotte dal campo virtuale", pur ammettendo che la transizione allo stato finale fosse collegata a quest'ultimo "da leggi probabilistiche analoghe a quelle che, nella teoria di Einstein, valgono per le transizioni indotte". Il "campo virtuale" assicura in tal modo che "l'atomo non ha alcuna necessità di sapere in anticipo che transizioni sta per compiere" [Slater 1925]. L'effetto Compton veniva così interpretato: ciascun elettrone illuminato nel cristallo bersaglio emette onde coerenti secondarie che possono essere interpretate come la solita luce diffusa da un oscillatore armonico (in questo caso virtuale). Come conseguenza del campo di radiazione virtuale, l'elettrone diffuso ha probabilità di avere impulsi in qualsiasi direzione. In questo modo il processo Compton può essere inquadrato come un processo continuo. L'equazione per la differenza di lunghezza d'onda tra il fotone diffuso e quello incidente $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$, verificata

con successo da Compton, era tuttavia basata sulle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso:

$$h\vec{k} = \vec{p} + h\vec{k}', \quad hc|\vec{k}| + mc^2 = hc|\vec{k}'| + (c^2p^2 + m^2c^4)^{1/2}$$

secondo la cinematica relativistica della diffusione di un fotone da parte di un elettrone in quiete. Secondo BKS queste equazioni dovevano quindi valere soltanto in media, così che la variazione $\Delta\lambda$ osservata sperimentalmente non rappresentava altro che la variazione media della lunghezza d'onda. Bohr considerava questa versione radicale della sua teoria necessaria allo scopo di evitare la paradossale circostanza di avere a che fare con un'entità che può essere simultaneamente onda e particella [Bohr Kramers Slater 1924].

Ma una prova della realtà della conservazione dell'energia sottostante al comportamento corpuscolare della luce nel processo Compton venne confermata dai notevoli esperimenti eseguiti già nel 1924 da Walther Bothe e Hans Geiger, in cui, con metodi di coincidenza, venne stabilito che i raggi X (fotoni) e gli elettroni di rinculo appaiono *simultaneamente*, il che avrebbe dato conto della perdita di energia nel corso della collisione [Bothe e Geiger 1925]. Il verdetto sperimentale sulla conservazione dell'energia e della quantità di moto nei singoli processi fu confermato da Compton e Simon utilizzando la camera a nebbia di Wilson con cui riuscirono ad osservare i fotoelettroni e gli elettroni di rinculo [Compton e Simon 1925] e Bohr accettò il verdetto di buon grado, tributando alla teoria BKS "il funerale più onorevole possibile".²¹

Un anno dopo gli esperimenti di Compton, il 20 aprile 1924, Einstein scrisse un articolo divulgativo per il *Berliner Tageblatt* in cui, commentando il risultato positivo dell'esperimento di Compton, osservava anche insoddisfatto: "Ci sono pertanto attualmente due teorie della luce, entrambe indispensabili, e – come si deve ammettere oggi, nonostante vent'anni di enormi sforzi da parte dei fisici teorici – prive di qualsiasi connessione logica". Ma a quel punto Bohr appariva ormai cosciente che la soluzione ai paradossi richiedeva una soluzione ben più radicale del tentativo BKS: "Si deve essere preparati al fatto che la necessaria generalizzazione della teoria elettrodinamica classica richiede una profonda rivoluzione dei concetti sui quali si è fondata finora la descrizione della natura" [Bohr 1925].

Dalla meccanica quantistica all'elettrodinamica quantistica

Di fronte alla confutazione sperimentale della teoria BKS, e alla possibilità che il quanto di luce potesse essere reale, Bohr rinunciò con riluttanza alle immagini intuitive dei processi atomici, pur accettando le leggi di conservazione per i processi atomici individuali.

Va sottolineato che la rappresentazione per oscillatori virtuali è al centro dell'invenzione di Heisenberg della nuova meccanica quantistica o meccanica delle matrici nel giugno del 1925, basata "esclusivamente su relazioni tra quantità che in linea di principio sono [empiricamente] osservabili". Restava la preoccupazione legata alla mancanza di una "interpretazione intuitiva" (*anschaulische*) da parte di Bohr, Born e Heisenberg.

A questo punto appare chiaro che, con la pubblicazione dei lavori di Schrödinger del 1926, la richiesta di una qualche forma di visualizzazione dei processi atomici si intensificò e lo stesso Schrödinger scrisse che aveva formulato la meccanica ondulatoria perché "si sentiva scoraggiato per non dire respinto... dalla mancanza di visualizzabilità (*An-schaulichkeit*) della meccanica quantistica. Offriva quindi una rappresentazione visuale basata sulla comune intuizione dei processi atomici che avvenivano senza discontinuità come fenomeni ondulatori. In effetti, a causa della rappresentazione come oscillatori virtuali, alla base dell'invenzione di Heisenberg di una nuova meccanica, gli elettroni legati avevano ormai del tutto perso la loro "localizzazione" e quindi una visualizzazione. Inoltre, le statistiche quantistiche mandavano in fumo la distinguibilità e l'individualità delle particelle.²²

Il primo ad aver tentato di mettere in relazione la simmetria delle funzioni d'onda a n particelle con la statistica fu Heisenberg, nel 1926. Dalla simmetria della Hamiltoniana discendono una ripartizione degli stati in sistemi di termini con diverse proprietà di simmetria delle autofunzioni. Questo collegamento può manifestarsi a proposito delle diverse simmetrie e invarianze che si possono presentare: per le particelle identiche, per le simmetrie di riflessione e di rotazione, per l'invarianza alla traslazione. Cronologicamente, questa connessione fu scoperta per prima nei sistemi di particelle identiche. In una memoria del giugno 1926 dal titolo *Il problema dei molti corpi e la risonanza* [Heisenberg 1926], Heisenberg dette una risposta alla domanda: come è connessa la statistica con la meccanica quantistica? Osservò che per particelle identiche la proprietà di simmetria o antisimmetria nello scambio di particelle (identiche) si conserva durante il moto.²³ Heisenberg concludeva che *in natura si presentano solo stati con un'autofunzione antisimmetrica nelle coordinate degli elettroni* (fermioni). Questa analisi gli consentì di risolvere finalmente il problema dello spettro dell'elio. Nell'agosto di quello stesso anno, Dirac otteneva dei risultati analoghi, seppure in una forma più rigorosa. Un sistema composto da una particella è rappresentato da una funzione d'onda di una variabile $\Psi(x)$, mentre un sistema composto da due particelle è rappresentato da una funzione d'onda di due variabili $\Psi(x,y)$. Se si considerano come ammissibili solo le funzioni d'onda simmetriche nello scambio di coordinate ($\Psi(x,y) = \Psi(y,x)$), le particelle soddisfano la statistica di Bose-Einstein. Se invece si considerano come ammissibili solo le funzioni d'onda antisimmetriche ($\Psi(x,y) = -\Psi(y,x)$) si ottiene il principio di esclusione di Pauli e la conseguente statistica che da allora fu chiamata di Fermi-Dirac:²⁴ "Le soluzioni con autofunzioni simmetriche sono quelle corrette se applicate ai quanti di luce, perché è noto che la meccanica statistica di Bose-Einstein porta alla legge di Planck per la radiazione di corpo nero. La soluzione con autofunzioni antisimmetriche...è quella corretta per gli elettroni in un atomo" [Dirac 1926]. Dirac aveva messo con chiarezza in evidenza che esistono due tipi differenti di "onde di materia": le simmetriche e le antisimmetriche. Queste considerazioni furono subito estese al caso di più di due particelle. Passo dopo passo la statistica quantistica si sviluppò man mano che venivano prese in considerazione le diverse implicazioni legate alla natura peculiare delle particelle elementari.

Oltre a queste problematiche del tutto inedite, la dualità onda-corpuscolo della materia complicava ulteriormente il quadro. La sua conferma sperimentale si ebbe nel 1927, con la scoperta di Davisson e Germer che dimostrava che un fascio di particelle come gli elettroni poteva dare luogo a fenomeni di diffrazione [Davisson 1937]. Come notavano Bohr, Kramers e Slater anche l'equazione che caratterizza il quanto di luce $E = h\nu$ si esprime attraverso la quantità E , che caratterizza la localizzazione, mentre ν è una "frequenza di radiazione definita attraverso esperimenti su fenomeni di interferenza" [Bohr Kramers Slater 1924].

Lo stesso Heisenberg scriveva ancora nel 1929 che "l'esistenza dell'elettrone è incomprendibile per la meccanica ondulatoria come l'esistenza del quanto di luce" lo è per la teoria di Maxwell" [Heisenberg 1929].

Alla metà del 1926 c'erano quindi due teorie atomiche apparentemente dissimili. La meccanica quantistica di Heisenberg era su base corpuscolare e tuttavia rinunciava a qualsiasi visualizzazione del corpuscolo legato in sé per sé. La maggior parte dei fisici non aveva alcuna familiarità con il suo apparato matematico. La meccanica ondulatoria era una teoria basata su un continuo di onde di materia. Il suo apparato matematico familiare fu determinante per fare i calcoli e inoltre rivendicava la restaurazione della intuizione corrente, per questo motivo fu bene accolta da molti fisici, Einstein incluso. Lo sviluppo della meccanica quantistica produsse regole per la descrizione dei sistemi di particelle microscopiche che promuovevano le variabili dinamiche fondamentali di un corrispondente sistema classico in operatori dotati di specifiche regole di commutazione. In questo modo un sistema inizialmente descritto nel linguaggio delle particelle classiche, acquistava caratteristiche associate con la visione ondulatoria classica complementare.

La formulazione di un metodo che permettesse l'estensione della meccanica quantistica al dominio relativistico appariva una conseguenza del tutto necessaria. La teoria del-

l'emissione e assorbimento di quanti di luce da parte di sistemi atomici, che segna l'inizio dell'elettrodinamica quantistica come teoria del sistema dinamico quantistico formato dal campo elettromagnetico interagente con particelle cariche, ebbe origine dallo sforzo stesso della formulazione della meccanica quantistica secondo lo schema matriciale. Nell'estate del 1925 Born aveva avuto da Heisenberg il suo lavoro sulla reinterpretazione quantomeccanica delle relazioni cinematiche e dinamiche che rappresenterà l'inizio della formulazione teorica della nuova meccanica quantistica [Heisenberg 1925]. L'idea base del nuovo schema era quello di conservare le equazioni classiche del moto, *reinterpretandole* come l'espressione di relazioni tra schemi numerici, immediatamente identificati da Born come matrici assegnate non a stati individuali, ma a transizioni tra stati e soggetti a una legge di moltiplicazione non commutativa. Born riformulò le condizioni quantistiche di Heisenberg come un'equazione per gli *elementi diagonali* del commutatore $pq - qp$ delle matrici p e q che rappresentano l'impulso e la posizione dell'oscillatore di Heisenberg trovando che $(pq - qp)_{mm} = h/2\pi i$. Subito dopo Born chiese a Jordan di collaborare con lui e in due mesi i due posero le basi della nuova meccanica delle matrici. Partendo dalle premesse poste da Heisenberg i due mostrarono che era possibile costruire una teoria matematica della meccanica quantistica che mostrava sorprendenti analogie con la meccanica classica, ma allo stesso tempo conservava le caratteristiche dei fenomeni quantistici. La meccanica quantistica differiva dalla meccanica classica come conseguenza del fatto che le variabili dinamiche che rappresentano la posizione e l'impulso di una particella non commutano tra di loro, ma soddisfano appunto le suddette relazioni di commutazione.

I primi indizi sulla possibilità che le difficoltà relative alla teoria della radiazione potevano essere superate estendendo il metodo quantomeccanico dagli atomi al campo di radiazione compaiono nella sezione finale del lavoro pubblicato da Born e Jordan nel settembre del 1925, dedicata al "tentativo di incorporare le leggi del campo elettromagnetico nella nuova teoria" [Born Jordan 1925].

Un'adeguata trattazione del sistema relativistico per eccellenza, la radiazione elettromagnetica, costituì infatti il modello iniziale per trattare un insieme arbitrario di particelle materiali dotate di basse (non relativistiche) o alte (relativistiche) velocità. Sebbene gli autori fossero consapevoli del "carattere provvisorio" delle loro considerazioni, proposero una descrizione di come trattare un sistema di onde elettromagnetiche libere, cioè come un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati.

L'oscillatore armonico rappresentava la più semplice tra le applicazioni del nuovo schema quantomeccanico di Heisenberg. Si sapeva che la radiazione elettromagnetica contenuta in una scatola, quando veniva considerata come un sistema dinamico classico, era equivalente da un punto di vista energetico a un numero infinito ma numerabile di oscillatori armonici. Born e Jordan scrivevano: "I processi elettromagnetici nel vuoto possono essere rappresentati da una sovrapposizione di onde piane. Considereremo i campi elettrici e magnetici \vec{E} e \vec{H} sotto forma di onde piane come *matrici* i cui elementi sono onde piane che vibrano in modo armonico; per esempio, per una opportuna scelta del sistema

di coordinate, $E = E_m \exp 2\pi i v_m \left(t - \frac{x}{c} \right) \dots$ Le equazioni di Maxwell saranno conservate come

equazioni matriciali".

Così come una corda può essere vista come un insieme infinito di oscillatori armonici con frequenze multiple della frequenza fondamentale, il campo elettromagnetico come sistema continuo retto da equazioni lineari, veniva ridotto a una sovrapposizione di oscillatori armonici indipendenti, ciascuno per ogni modo della radiazione (sviluppo in modi normali). Tuttavia, secondo la meccanica quantistica un oscillatore armonico non può oscillare in modo qualsiasi: la sua energia non può assumere valori arbitrari, ma è *quantizzata*. I possibili valori di questa energia differiscono della quantità costante $h\nu$. Se è vero che il campo elettromagnetico può essere trattato come un insieme di oscillatori armoni-

ci, anche questi saranno quantizzati: ogni modo normale del campo potrà variare la sua energia per quantità $h\nu$, dove ora ν è la frequenza di quel particolare modo.

L'equazione precedente è storicamente interessante; si tratta della prima mai pubblicata su quella che gli autori chiamano "elettrodinamica delle matrici". Tuttavia, nel trattare il problema del campo emesso da una particella carica si ritrovarono con un insieme di indici relativi sia ai livelli atomici sia ai livelli degli oscillatori del campo. Born e Jordan non precisavano cosa fossero gli E_{mn} e le ν_{mn} . In ogni caso è importante l'introduzione del discorso che i campi elettrici e magnetici dovessero essere considerati variabili dinamiche, rappresentati da matrici e soggetti a regole di quantizzazione.

Come già aveva mostrato Einstein nel 1906 nell'analizzare nuovamente il lavoro di Planck: l'energia di un oscillatore materiale "può prendere solo quei valori che sono multipli interi di $h\nu$. Nel corso dell'emissione o dell'assorbimento l'energia cambia per salti che sono multipli di $h\nu$ " [Einstein 1906]. Soltanto un mese più tardi, nel famoso lavoro a tre (*Dreimännerarbeit*) completato da Born, Heisenberg e Jordan nel novembre 1925 [Born Heisenberg Jordan 1926] viene discusso il problema già sollevato da Einstein nel 1909: quali sono le fluttuazioni in energia in un piccolo volume all'interno di una cavità occupata da radiazione elettromagnetica in equilibrio termico? Einstein aveva derivato le fluttuazioni utilizzando come punto di partenza la legge di Planck – e quindi l'ipotesi della natura corpuscolare della luce, diceva Einstein – e ragionamenti statistici alla Boltzmann. Ora, nel 1925, il punto era: si può fare a meno di questo punto di partenza e derivare lo stesso risultato da principi primi della meccanica quantistica?

Nella sezione "Oscillatori armonici accoppiati. Statistica dei campi d'onda" [Born Heisenberg Jordan 1926, p. 606] scritto in realtà dal solo Jordan, come sappiamo da una lettera di Heisenberg a Pauli,²⁵ venne ripreso il meccanismo dell'accoppiamento trattato da Bohr proponendo di separare completamente da un punto di vista teorico "l'aspetto ondulatorio del problema dalla teoria dei quanti di luce". Heisenberg accennava anche al fatto che Jordan riteneva ci fosse un'analogia tra i loro calcoli e la statistica di Bose e ammetteva di essere un po' infelice perché sentiva di non conoscere "abbastanza statistica" per giudicare quanto senso ci fosse. Tuttavia non si sentiva nemmeno in grado di criticare, in quanto "il problema in sé e i successivi calcoli appaiono significativi".

Il problema statistico discusso nel *Dreimännerarbeit* partiva da una descrizione della radiazione di cavità come un insieme di oscillatori armonici indipendenti, disaccoppiati. Imponendo le regole di commutazione $[q, p] = i\hbar$ sulle variabili che descrivevano questi oscillatori, Jordan derivò la formula di Einstein per le fluttuazioni dell'energia. Mostrò che in una descrizione quantistica le proprietà corpuscolari delle onde elettromagnetiche erano una conseguenza della non-commutatività delle variabili dinamiche che descrivono il campo elettromagnetico.

La sfida era appunto quella di derivare la formula di Einstein *dinamicamente*, senza l'uso di assunzioni legate alla termodinamica statistica. Per semplicità Jordan considerò un modello unidimensionale, in luogo della cavità tridimensionale. La radiazione della cavità veniva quindi descritta come un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati, calcolando le fluttuazioni di energia in un segmento di una corda vibrante di lunghezza L fissata agli estremi. In questo modo Jordan riusciva ad ottenere per le fluttuazioni dell'energia l'espressione già trovata da Einstein, contenente i due termini della dualità onda-corpuscolo

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = h\nu \langle E \rangle + \frac{\langle E \rangle^2}{Z_V}$$

(dove Z_V è il numero degli oscillatori con frequenze caratteristiche, cioè il numero di modi, nel volume V che contiene la corda e nel range specificato per le frequenze). Il secondo termine, proporzionale al quadrato dell'energia media, è proprio quello che ci si aspetterebbe classicamente. Il primo invece, proporzionale all'energia media, è quello aspettato per la fluttuazione quadratica media in un sistema di particelle. Questo risulta-

to fu considerato, a ragione, uno dei primi successi della meccanica quantistica, come Born, Heisenberg e Jordan subito osservarono:

Se si tiene presente che la questione qui considerata è in qualche modo lontana dai problemi la cui indagine ha portato allo sviluppo della meccanica quantistica, tale risultato può essere considerato particolarmente incoraggiante per i futuri sviluppi della teoria [Born Heisenberg Jordan 1926, p. 615].

La visione di Jordan che le regole di quantizzazione che garantivano la transizione dalla descrizione classica a quella quantistica di un sistema di particelle dovessero essere applicate anche a sistemi con infiniti gradi di libertà, cioè ai campi, stava generando i suoi primi frutti significativi. Il lavoro conteneva una interpretazione del formalismo utilizzato che apriva “la porta alla teoria quantistica dei campi” [Pais 1991, p. 333]. Per comprenderne la portata è necessario esaminare la procedura di quantizzazione dell’oscillatore armonico, e la sua estensione al campo di radiazione rappresentato come un insieme di oscillatori disaccoppiati, da cui scaturisce in modo naturale il linguaggio alla base della formulazione dell’elettrodinamica quantistica.

Intermezzo: procedure di quantizzazione

Con la scoperta della natura corpuscolare della luce, che affiancava senza eliminarla quella ondulatoria a la Maxwell, nasce il primo dilemma onda-corpuscolo. Che fare con gli strumenti matematici che descrivano una tale ambiguità (che sarà ancora più ambigua per le particelle)? I fisici, con molta spregiudicatezza, adottano “a scatola chiusa” l’idea che se si dispone di una hamiltoniana quantizzabile a partire da operatori interpretabili come coordinate e momenti non commutativi in uno spazio astratto opportuno, l’operazione è possibile. Risulterà persino molto elegante e intuitiva.

Le procedure concettuali e formali utilizzate dai padri fondatori dell’elettrodinamica quantistica portarono alla formulazione della prima teoria in grado di spiegare l’emissione e l’assorbimento di quanti di luce da parte dei sistemi atomici, come una teoria dei sistemi quantodinamici formati dal campo elettromagnetico e dalle particelle cariche con cui interagisce. Il primo passo fu quello di applicare il processo di quantizzazione agli “oscillatori armonici” per mezzo dei quali veniva rappresentato il campo classico di radiazione.

Il passaggio dall’oscillatore armonico classico unidimensionale a quello quantistico si basa sull’introduzione dell’operatore hamiltoniano $H = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ per il singolo

oscillatore, e sull’introduzione di regole di quantizzazione su q e p , considerati operatori non commutativi che soddisfano quindi le relazioni di commutazione $[q, p] = qp - pq = i\hbar$.²⁶

Per risolvere il problema è necessario trovare gli stati del sistema e i corrispondenti valori dell’energia. Si può procedere secondo il metodo analitico e risolvere l’equazione di Schrödinger per l’oscillatore armonico, oppure si può seguire la via algebrica, basandosi esclusivamente sull’algebra degli operatori, secondo il metodo formulato da Dirac. Introducendo l’operatore a e il suo hermitiano coniugato a^+ definiti attraverso le seguenti combinazioni lineari delle p e q :

$$a = \frac{m\omega q + ip}{(2\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad a^+ = \frac{m\omega q - ip}{(2\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}},$$

si trova che le relazioni di commutazione per p e q implicano le corrispondenti relazioni di commutazione $[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 1$ ²⁷ e $[a, a] = [a^+, a^+] = 0$. Tenendo conto delle prime si

ottiene quindi l'hamiltoniana espressa in termini degli operatori a e a^+ :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^+ + a^+a) = \hbar\omega \left(a^+a + \frac{1}{2} \right).$$

Si definisca ora un nuovo operatore, l'operatore numero $N = a^+a$. Tenendo conto delle relazioni di commutazione per a e a^+ si ottengono le seguenti relazioni:

$$[N, a] = -a \quad [N, a^+] = a^+ \quad aa^+ = N + 1.$$

L'hamiltoniana scritta in termini di N diventa: $H = \hbar\omega \left(a^+a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$.

Utilizziamo la notazione di Dirac secondo cui lo stato di un sistema quantomeccanico viene descritto attraverso un vettore chiamato *ket* e scritto come $|v\rangle$. Supponendo che $|v\rangle$ sia uno stato del sistema che stiamo studiando a cui corrisponde l'energia E_v , il problema diventa quello di risolvere l'equazione $H|v\rangle = E_v|v\rangle$.²⁸ Corrispondentemente, il problema si trasforma in quello di trovare gli autostati dell'operatore N : $N|v\rangle = v|v\rangle$. Per trovare i possibili valori di v è opportuno studiare le proprietà dell'operatore N .

Proprietà 1 - Gli autovalori dell'operatore $N = a^+a$ sono positivi o nulli, come emerge dal ragionamento che segue. L'equazione precedente si può scrivere, $N|v\rangle = v|v\rangle \rightarrow a^+a|v\rangle = v|v\rangle$ e moltiplicando a sinistra per $\langle v|$ si ha $\langle v|a^+a|v\rangle = v\langle v||v\rangle = v$, poiché gli autostati di un sistema hanno norma unitaria per definizione. Tuttavia, si ha anche

$$v = \langle v|a^+a|v\rangle = (a|v\rangle)^+(a|v\rangle) = |a|v\rangle|^2.$$

E quindi, per ogni stato del sistema rappresentato dal vettore di stato $|v\rangle$ che sia un *autostato* dell'operatore N con *autovalore* v ,²⁹ accade che $v = |a|v\rangle|^2 \geq 0$ per definizione della norma di un vettore.

Proprietà 2 - Se $|v\rangle$ è un *autostato* dell'operatore N con *autovalore* v , allora $a|v\rangle$ è un *autostato* di N con *autovalore* $v-1$. Infatti si ha $Na|v\rangle = a^+a|v\rangle$, ma dalle regole di commutazione per gli operatori a e a^+ e tenendo anche presente che moltiplicando a destra entrambi i membri della relazione di commutazione $a^+a = a a^+ - 1$ per a , si ottiene $Na = a a^+ a - a$ (e seguendo analoga procedura nel moltiplicare la stessa per a^+), si trova che:

$$Na|v\rangle = (aa^+ - 1)a|v\rangle = a(a^+a - 1)|v\rangle = a(N - 1)|v\rangle = (v - 1)a|v\rangle.$$

Proprietà 3 - Analogamente:

$$Na^+|v\rangle = (a^+a)a^+|v\rangle = a^+(aa^+)|v\rangle = a^+(1 + aa^+)|v\rangle = aa^+(1 + N)|v\rangle = (1 + n)a^+|v\rangle.$$

Queste possono essere considerate come equazioni agli autovalori in cui $a|\alpha\rangle$ e $a^+|\alpha\rangle$ e sono appunto autovettori di N che corrispondono agli autovalori $(v - 1)$ e $(v + 1)$. Il ruolo di a^+ e di a è quindi chiaro: a^+ e a agiscono su $|v\rangle$ generando nuovi autovettori con autovalore incrementato o diminuito di 1. Se lo stato $a|v\rangle$ è un autostato con autovalore $(v - 1)$, lo stato $a(a|v\rangle) = a^2|v\rangle$ è un autostato con autovalore $(v - 2)$ e continuando la procedura si avrà che lo stato $a^n|v\rangle$ è un autostato con autovalore $(v - n)$, numero che è compreso tra 0 e 1. Applicando ancora l'operatore a si ottiene lo stato $a^{n+1}|v\rangle$ di autovalore $(v - n - 1)$, numero che è negativo. Ma come si è visto all'inizio, gli *autovalori di N sono positivi o nulli*, quindi il *numero v* deve essere intero (positivo o nullo), in modo tale che l'autovettore sia il vettore nullo e che il vettore non esista. Poiché a partire da un autostato $|m\rangle$ qualsiasi si può ottenere un qualsiasi altro autostato applicando in successione gli

operatori a e a^+ , segue che *gli autovalori di N sono tutti i numeri naturali, cioè gli interi non negativi: $n = 0, 1, 2, 3, \dots$* Ma gli autovalori di N sono anche quelli di H ,

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

Quindi gli autostati dell'energia sono gli autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero N e gli autovalori di H sono del tipo

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

ciascuno corrispondente all'energia dello stato $|n\rangle$. Si è quindi quantizzata l'energia trovando i livelli energetici dell'oscillatore armonico quantistico.

Se gli autostati di N sono normalizzati a 1 ($\langle n|n\rangle = 1$), allora gli stati definiti $|n \pm 1\rangle$ da $a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle$ $a^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle$ sono anch'essi normalizzati a 1. Gli operatori a^+ e a vengono chiamati operatori di "innalzamento" e "abbassamento" grazie alla loro proprietà di far passare da uno stato allo stato superiore o inferiore. In particolare, lo stato fondamentale $|0\rangle$ è quello "annichilato" da a : $a|0\rangle = 0$.

Come visto sopra, lo stato $a|n\rangle$ è un autostato di N con autovalore $n-1$

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

e quindi si ha che $a|n\rangle = k_-|n-1\rangle$. E analogamente la relazione $Na^+|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle$ implica $a^+|n\rangle = k_+|n+1\rangle$.

La determinazione delle costanti k_{\pm} può essere ottenuta attraverso la seguente procedura, ricordando la relazione tra N e gli operatori di creazione e distruzione e tenendo presente che gli autostati hanno norma unitaria:

$$|k_+|^2 = |k_-|^2 \langle n+1|n+1\rangle = \langle a^+n|a^+n\rangle = \langle n|aa^+|n\rangle = \langle n|N + [a, a^+]|n\rangle = n+1$$

$$|k_-|^2 = |k_+|^2 \langle n-1|n-1\rangle = \langle an|an\rangle = \langle n|a^+a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n.$$

Le proprietà degli *operatori di creazione e distruzione* di un'unità elementare di energia, si riassumono quindi nelle seguenti relazioni:

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$$

e i cui elementi di matrice sono quindi $\langle m|a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}$ e $\langle m|a|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1}$.

Le autofunzioni normalizzate di N si ottengono a partire dall'autofunzione corrispondente all'autovalore più basso applicando in successione l'operatore a^+ :

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$

L'operatore a abbassa l'energia di uno stato di un quanto $\hbar\omega$, mentre l'operatore a^+ la aumenta di $\hbar\omega$.

Queste idee possono essere estese a un insieme di oscillatori armonici e applicate nel caso del modello semplice di un solido elastico considerato come una catena lineare di

atomi connessi da forze che tendono a tenerli insieme a intervalli regolari l'uno dall'altro. Se gli spostamenti degli atomi dalle loro posizioni di equilibrio sono piccoli rispetto alle distanze interatomiche, si ottengono equazioni accoppiate del moto di tipo lineare, mentre l'energia cinetica e potenziale degli atomi risultano rispettivamente funzioni quadratiche delle loro velocità e delle loro posizioni. In meccanica classica, la soluzione di questo problema può essere ottenuta in termini di coordinate e modi normali delle oscillazioni. La più generale configurazione degli atomi del solido può essere espressa come una sovrapposizione di tali modi normali e quindi le ampiezze di tutti i modi possono rimpiazzare come variabili le coordinate dei singoli atomi. Questa semplice rappresentazione in termini di spostamenti atomici, al limite del continuo diventa la teoria di "onde elastiche". La caratteristica di tipo ondulatorio dei modi normali classici, si trasforma in proprietà di tipo corpuscolare quando il reticolo viene analizzato da un punto di vista quantomeccanico. Le vibrazioni elementari del reticolo cristallino conducono in modo naturale alla traduzione in termini corpuscolari delle vibrazioni stesse, ai cosiddetti "fononi", quanti delle vibrazioni. Si tratta di un esempio particolarmente trasparente della relazione tra aspetto corpuscolare e aspetto ondulatorio, che fu indipendentemente applicato nel caso della fisica dello stato solido.

La situazione non cambia se si considera il limite di spazi infinitamente piccoli tra gli atomi, in modo tale che le equazioni discrete del moto possano essere sostituite da equazioni differenziali di un continuo elastico. In particolare, come vedremo, le stesse idee sono sostanzialmente utilizzabili nel caso del campo di radiazione, considerato come la sovrapposizione di un sistema di oscillatori armonici, uno per ciascun modo normale del campo. Nel caso del continuo la sequenza dei modi normali è infinita e corrisponde al fatto che il campo continuo ha un numero infinito di gradi di libertà.

L'energia del campo di radiazione in assenza di cariche e correnti è data da

$$H_{\text{rad}} = 1/2 \int (E^2 + B^2) d^3x \quad .^{30}$$

Per quantizzare la teoria è necessario introdurre coordinate canoniche coniugate (come x e p nel caso della meccanica quantistica non relativistica). In un certo istante di tempo t , il potenziale vettore A deve essere specificato in ogni punto x dello spazio. In questo senso il campo elettromagnetico possiede una infinità continua di gradi di libertà. Per rappresentare il potenziale vettore in serie di Fourier, cioè specificato da un insieme numerabile di coefficienti dell'espansione di Fourier, immaginiamo la radiazione all'interno di una scatola cubica di lato L e imponiamo tre condizioni periodiche al contorno sul potenziale vettore, alla superficie del cubo del tipo $[A(0,y,z,t) = A(L,y,z,t), \text{ ecc.}]$. In questo modo otteniamo una descrizione del campo in termini di un numero infinito, ma numerabile, di gradi di libertà; analogamente al caso dell'analisi di Fourier della corda vibrante. L'analisi di Fourier corrisponde a trovare i modi normali del campo di radiazione (campo in assenza di cariche e correnti visto come un insieme di onde piane trasversali), ciascun modo risulta descritto indipendentemente dagli altri dall'equazione di un oscillatore armonico:

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

dove $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ e le somme si intendono sui due stati di polarizzazione $r = 1, 2$ per ogni \mathbf{k} e su tutti i possibili impulsi

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$$

con $n_1, n_2, n_3, = 0, \pm 1, \dots$ e dove gli $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}$ sono vettori unitari mutuamente ortogonali e ortogonali anche al vettore d'onda: $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ $r, s = 1, 2$.

Il fattore iniziale è introdotto per motivi di convenienza e la forma della serie assicura che il potenziale vettore sia reale $A = A^*$. Il potenziale vettore deve soddisfare l'equazione delle onde

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = 0 .$$

Da cui si trovano le equazioni relative alle ampiezze individuali:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a_r = -\omega_k^2 a_r(\mathbf{k}, t) .$$

Queste sono le equazioni dell'oscillatore armonico relative ai modi normali del campo di radiazione. Conviene scrivere le soluzioni nella forma $a_r(\mathbf{k}, t) = a_r(\mathbf{k}, 0)e^{-i\omega_k t}$. Utilizzando l'espansione in serie di Fourier del potenziale vettore, gli $a_r(\mathbf{k})$ e i loro coniugati $a_r^*(\bar{\mathbf{k}})$, e tenendo presente il legame tra potenziale vettore \mathbf{A} e i campi \mathbf{B} ed \mathbf{E} , si può ora esprimere l'energia del campo di radiazione in termini delle ampiezze

$$H_{rad} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \hbar\omega_k a_r(\mathbf{k}) a_r^*(\mathbf{k}) .$$

È una sovrapposizione di oscillatori indipendenti, ciascuno per ogni modo del campo di radiazione. È indipendente dal tempo come ci si aspettava, in assenza di cariche e correnti, perché si tratta di oscillatori (campi) non forzati. Le espressioni per il potenziale vettore e per l'energia del campo di radiazione sono state ottenute fin qui *nell'ambito della teoria classica*.

La quantizzazione si effettua quantizzando i singoli modi utilizzando e generalizzando i risultati ottenuti per l'oscillatore armonico quantistico. L'espressione ottenuta per l'hamiltoniana del campo è una sovrapposizione di oscillatori armonici indipendenti, uno per ciascun modo del campo di radiazione. Ricordiamo che gli $a_r(\mathbf{k})$ e i loro complessi coniugati sono le ampiezze classiche. Analogamente alle relazioni di commutazione per gli operatori a e a^+ dell'oscillatore, si introducono quindi le relazioni di commutazione

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^*(\mathbf{k}')] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = [a_r^*(\mathbf{k}), a_s^*(\mathbf{k}')] = 0$$

da cui risulta che $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^*(\mathbf{k})$ non commutano. L'hamiltoniana dei modi normali si scrive

$$H_{rad} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \hbar\omega_k \left[a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] .$$

Come già visto gli operatori $N_r(\mathbf{k}) = a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$ hanno autovalori $n_r(\mathbf{k}) = 0, 1, 2$ e autofunzioni ottenute a partire dallo stato fondamentale:

$$|n_r(\mathbf{k})\rangle = \frac{[a_r^*(\mathbf{k})]^{n_r(\mathbf{k})}}{\sqrt{n_r(\mathbf{k})!}} |0\rangle$$

così che le autofunzioni di H_{rad} sono etichettate a partire dagli autovalori di N_r per ciascun modo r , come si vede dall'equazione gli autovalori:

$$H |n_1, \dots, n_r, \dots, n_N\rangle = \sum_r \hbar\omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) |n_1, \dots, n_r, \dots, n_N\rangle$$

a cui corrispondono appunto le energie $\hbar\omega_r [n_r + \frac{1}{2}]$. Dove ciascun autostato si ottiene applicando in successione gli operatori di creazione allo stato fondamentale del sistema $|0\rangle$, lo stato in cui tutti i modi normali sono nello stato fondamentale:

$$|n_1, \dots, n_r, \dots, n_N\rangle = \left[\prod_{r=1}^N \frac{(a_r^+)^{n_r}}{\sqrt{n_r!}} \right] |0, \dots, 0, \dots, 0\rangle .$$

Fino a questo punto si è considerato il campo come un sistema dinamico, postulando che le grandezze del campo sono operatori che soddisfano determinate relazioni di commutazione, analoghe a quelle relative alla posizione e all'impulso nella teoria quantistica non

relativistica. Facendo l'analisi di Fourier dell'operatore del campo A , tutte le quantità relative al campo possono essere quindi espresse in termini dell'operatore $N_r(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})$, in particolare l'energia totale. Su che cosa opera l'operatore N_r ? Consideriamo uno stato del campo descritto da un vettore di stato $|n_r\rangle$, che come abbiamo visto è autofunzione dell'operatore N_r e soddisfa l'equazione agli autovalori $N_r|n_r\rangle = n_r|n_r\rangle$. I numeri di occupazione relativi a ciascuna frequenza sono descritti dai vettori $|n_r\rangle$, autofunzioni di N_r , che soddisfano anche le analoghe relazioni

$$N(a|n) = (n-1)(a|n) \quad N(a^+|n) = (n+1)(a^+|n),$$

le quali ribadiscono che $a^+|n\rangle$ descrive lo stato di un campo corrispondente al numero di occupazione $(n + 1)$. Così che a^+ è un operatore di creazione, aumenta di 1 il numero di occupazione quando agisce su un certo vettore di stato. Analogamente, a è un operatore di distruzione; quando opera su un vettore di stato diminuisce di 1 il numero di occupazione. Questi operatori sono lo strumento matematico principale attraverso cui funziona la teoria dei campi. Come ha osservato Jun John Sakurai, si potrebbe dire che "i tre operatori $a_r^\dagger(\mathbf{k})$, $a_r(\mathbf{k})$ e $N_r(\mathbf{k})$ corrispondono rispettivamente al Creatore (Brama), al Distruttore (Shiva) e al Salvatore (Vishnu) nella mitologia Indù" [Sakurai 1967, p. 27].

Nonostante il numero degli oscillatori sia fissato (e uguale a N), i numeri di occupazione possono variare enormemente da uno stato all'altro. Questo formalismo rende quindi possibile la descrizione di una situazione fisica in cui la popolazione di ciascuno stato non è soggetta a restrizioni. Inoltre, come si vedrà più avanti, questa forma, *simmetrica* nello scambio di una coppia qualsiasi delle r "etichette" grazie alle regole di commutazione, appare appunto in modo naturale nella quantizzazione di sistemi di particelle identiche del tipo *bosoni*. I vettori di stato che si ottengono applicando gli operatori allo stato fondamentale $|0\rangle \equiv |0, \dots, 0\rangle$ sono quindi automaticamente consistenti con la statistica di Bose-Einstein.

Lo stato di energia più bassa del campo di radiazione è lo stato di vuoto $|0\rangle \equiv |0, \dots, 0\rangle$ nel quale tutti i modi normali sono nel loro stato fondamentale e tutti i numeri di occupazione $n_r(\mathbf{k})$ sono zero.

L'interpretazione di queste equazioni è la diretta generalizzazione da un singolo oscillatore armonico a una sovrapposizione di oscillatori indipendenti, ciascuno per ogni modo (\mathbf{k}, r) della radiazione. Analogamente gli $a_r(\mathbf{k})$ operano sugli stati autofunzioni di H riducendo il numero di occupazione $n_r(\mathbf{k})$ di un'unità, lasciando tutti gli altri numeri di occupazione inalterati:

$$a_r(\mathbf{k})| \dots n_r(\mathbf{k}) \dots \rangle = [n_r(\mathbf{k})]^{1/2} | \dots n_r(\mathbf{k}) - 1, \dots \rangle.$$

L'energia a sua volta si riduce di $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \hbar c|\mathbf{k}|$. Di nuovo si può interpretare l'operatore $a_r(\mathbf{k})$ come un operatore di assorbimento, che distrugge un fotone nel modo (\mathbf{k}, r) , cioè con impulso $\hbar\mathbf{k}$, energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ e vettore di polarizzazione lineare $\varepsilon_r(\mathbf{k})$. Analogamente l'operatore $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ viene interpretato come un operatore di creazione di tale fotone.

Secondo le precedenti equazioni lo stato di vuoto ha un'energia $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \hbar\omega_{\mathbf{k}}$. Nel limite del continuo questa è una costante infinita, uno dei tanti infiniti che a lungo costituiranno l'ossessione di tutti coloro che si occuperanno di teoria dei campi. Osservando che in questo caso ciò che interessa sono soltanto le energie relative, questo termine non ha alcun significato fisico: e può essere eliminato spostando lo zero della scala di energia in modo da farlo corrispondere con lo stato di vuoto $|0\rangle$. Si ottiene quindi l'hamiltoniana seguente per il campo di radiazione

$$H_{rad} = \sum_k \sum_r \hbar \omega_k [a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})].$$

È importante sottolineare che secondo l'analisi di Fourier

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_k \sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V \omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]$$

è una somma di termini contenenti degli esponenziali ciascuno dei quali si può interpretare come l'onda di un fotone individuale. Ma le ampiezze di Fourier a^\dagger e a sono operatori, mentre $A(\mathbf{x}, t)$ nell'insieme si riferisce all'intero insieme di fotoni, e non al singolo fotone qualsiasi. L'aver assunto le grandezze del campo come operatori e l'aver postulato che dovessero valere delle relazioni di commutazione analoghe a quelle relative agli operatori della posizione e dell'impulso³¹ il quadro completo in termini di operatori di creazione e distruzione discende in modo naturale dalla logica stessa della trattazione matematica.

A questo punto siamo in grado di riesaminare il lavoro di Born, Heisenberg e Jordan e comprendere meglio il suo ruolo nell'aprire la via alla teoria quantistica dei campi.

Jordan e la "seconda quantizzazione"

Come già accennato, il modo più semplice per trattare la quantizzazione del campo elettromagnetico era quello di utilizzare un modello unidimensionale assai semplificato come quello dell'equazione di d'Alembert per la corda vibrante, un sistema meccanico a infiniti gradi di libertà, che in qualche modo è l'equivalente infinito dimensionale dell'oscillatore armonico. Questa analogia, che rappresenta la dinamica di una corda vibrante come la dinamica di infiniti oscillatori disaccoppiati, fu, come già detto, applicata da Jordan nel *Dreimännerarbeit* [Born Heisenberg Jordan 1926] per studiare il problema affrontato da Debye, che aveva appunto utilizzato un insieme di oscillatori disaccoppiati per rappresentare il campo elettromagnetico in una cavità e che aveva seguito l'assunzione di Einstein secondo cui l'energia di un oscillatore di frequenza ν doveva essere necessariamente un multiplo intero di $h\nu$ [Debye 1910].³²

Nell'estate del 1925 Ehrenfest aveva tenuto un seminario a Göttingen in cui aveva utilizzato il sistema della corda vibrante come modello unidimensionale della radiazione di corpo nero all'interno di una scatola, calcolando la fluttuazione quadratica media dell'energia in un piccolo segmento della corda [Ehrenfest 1925]. Una corda vibrante soddisfa l'equazione (delle onde) – l'analogo delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico libero –

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ dove c è la velocità di propagazione dell'onda

e $u(x, t)$ è lo spostamento della corda di lunghezza L dalla posizione di equilibrio. Il problema equivale a considerare un insieme infinito di oscillatori armonici disaccoppiati. Ponendo $u(x, t) = q_j(t) \exp(ikx)$ le condizioni al contorno periodiche $u(0, t) = u(L, t)$ richiedono

che $\exp(ikL) = 1$ e quindi $k_j = \frac{2\pi j}{L}$ $j = 1, 2, \dots$. Si ha una soluzione per ogni j e quindi

$\frac{d^2}{dt^2} q_j(t) + c^2 k_j^2 q_j = 0$. Per ogni k , ciascuna di queste equazioni risulta essere l'equazione di

un moto armonico semplice, così che si tratta di un insieme infinito di oscillatori disaccoppiati, uno per ciascun modo della corda, caratterizzati da una frequenza caratteristica

$\omega_j = ck_j = 2\pi c j / L$, descritti dall'hamiltoniana con $H = \frac{1}{2} \sum_j (p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2)$.

Questo mostra che la distribuzione dell'energia su tutte le frequenze degli oscillatori è costante nel tempo. Poiché non c'è accoppiamento tra gli oscillatori, non c'è un meccanismo per trasferire energia da un modo all'altro. Tuttavia la distribuzione spaziale dell'energia in un dato intervallo di frequenze varia nel tempo lungo un piccolo segmento della corda. L'energia totale in quell'intervallo rimane costante, ma la frazione riguardante quel piccolo segmento sarà soggetta a fluttuazioni.

La quantizzazione dell'oscillatore implica per le matrici q_j e $p_j = dq_j/dt$, il momento coniugato a q_j , una generalizzazione per le relazioni di commutazione

$$[p_k(t), q_j(t)] = i\hbar\delta_{kj} \quad [p_k(t), p_j(t)] = [q_k(t), q_j(t)] = 0 .$$

Sono proprio queste relazioni a giocare un ruolo centrale nella derivazione di Jordan delle fluttuazioni dell'energia, contenenti appunto espressioni in potenze delle q_j e p_j .

Come già accennato, Jordan ottiene i due termini della dualità onda-corpuscolo

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \hbar\nu \langle E \rangle + \frac{\langle E \rangle^2}{Z_\nu}$$

già derivati da Einstein, un risultato a buona ragione considerato una conferma della procedura concettuale seguita, non senza aver ribadito che l'operazione era riuscita senza far esplicito ricorso a "una miscela di considerazioni caratteristiche della teoria delle onde e di quella dei quanti di luce" [Born Heisenberg Jordan 1926]. L'articolo proseguiva con una interessante osservazione, che avrebbe avuto un ruolo nei successivi sviluppi della teoria della radiazione.

Nel criticare il lavoro di Debye ("Ci sembra che la mescolanza tra concetti teorici di tipo ondulatorio e quelli del tipo quanto di luce difficilmente corrisponda all'essenza del problema")³³ Born, Heisenberg e Jordan osservano che anche l'approccio di Ehrenfest non era in grado di affrontare il problema dell'"accoppiamento tra atomi distanti" a causa del loro carattere semiclassico: una mescolanza di nozioni derivanti dalla teoria ondulatoria con il concetto di quanti di luce. I tre propongono quindi "una nuova interpretazione" della forma

diagonale dell'energia totale della corda, $H = \sum_k (n_k + \frac{1}{2})\hbar\nu_k$, che suona sostanzialmente

così: "Il numero quantico n_k di un oscillatore è uguale al numero di quanti dotati della corrispondente frequenza ν_k ".³⁴ Detto altrimenti, ogni stato quantico corrispondente alla frequenza ν_k è popolato da n_k quanti di energia $\hbar\nu_k$, il che implica che in un dato stato possono esistere tutte le particelle che si vuole. Sono particelle che soddisfano quindi la statistica di Bose-Einstein. Inoltre, dalle relazioni di commutazione per gli operatori di

creazione e distruzione: $[a_k^\dagger, a_j^\dagger] = [a_k, a_j] = 0 \quad [a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}$, discende subito la proprietà di simmetria della funzione d'onda di Schrödinger: applicando in successione i due operatori a uno stato di due particelle, si ottiene lo stesso stato con indici scambiati. Questo modo di pesare gli stati del sistema fornisce la statistica di Bose-Einstein.

Il ragionamento seguito era stato prima quello di partire da un campo classico che soddisfava l'equazione delle onde e considerare i modi normali del campo (i coefficienti q_j) per descriverlo come un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati. Il secondo passo era quello della cosiddetta *seconda quantizzazione*: reinterpretare gli n_k in modo da riferirsi non a una, bensì a n_k particelle, quanti di luce.³⁵ Si passava così da un problema a un corpo (o meglio da un problema ad un grado di libertà) a un problema a n_k corpi, dove n_k era variabile. Questa interpretazione degli autostati dell'energia in termini di quanti portava quindi a una "descrizione corpuscolare" del campo.

A livelli distinti dell'energia degli oscillatori iniziali corrispondevano *numeri distinti di quanti*. Nella nuova interpretazione una transizione da un livello all'altro doveva significare quindi che *quanti con energia $h\nu$ vengono creati oppure spariscono*. Un comportamento

che cominciava a discostarsi alquanto da quello delle particelle rappresentate come qualcosa di simile a delle “biglie”.

I tre non mancarono di osservare che la nuova interpretazione automaticamente implicava la statistica di Bose-Einstein. Sia perché il numero dei quanti con energia $h\nu$ non era soggetto a restrizioni, così che in un dato stato quantico potevano coesistere un numero arbitrario di quanti, sia perché per sua stessa natura il formalismo proibiva ogni possibilità di dare significato a un'espressione del tipo “chi è chi” relativo al singolo quanto. Il criterio di distinguibilità di Boltzmann era svanito.³⁶

Poco più tardi Jordan usò il fatto che le fluttuazioni riflettevano il carattere “corpuscolare e discontinuo” della radiazione per argomentare contro la speranza di Schrödinger di ristabilire una descrizione continua dei fenomeni atomici con la sua meccanica ondulatoria [Jordan 1927]. L'interpretazione corpuscolare, basata sugli autostati di H non era compatibile con la descrizione ondulatoria, che dovrebbe basarsi sugli autostati di $u(x,t)$, il che appare manifesto dal fatto che H non commuta con $u(x,t)$: $[H, u(x,t)] \neq 0$.

Sul momento nessuno notò questi risultati e sembra che ben pochi lessero questa sezione del *Dreimännerarbeit*. Dopo la definitiva confutazione della teoria di Bohr, Kramers e Slater, l'ultimo sforzo disperato di evitare i quanti di luce, fu presa in considerazione la possibilità che la luce consistesse di particelle guidate da onde. In questo quadro si poteva presumere che le onde e le particelle contribuissero separatamente alle fluttuazioni, come aveva ipotizzato Einstein nel 1909: “gli effetti delle due cause della fluttuazione agiscono come fluttuazioni originate da cause mutuamente indipendenti (additività dei termini di cui il quadrato della fluttuazione è composto” [Einstein 1909]. Una derivazione della formula di Einstein basata su questa assunzione fu fornita da Walter Bothe l'anno successivo all'uscita del *Dreimännerarbeit* [Bothe 1927].³⁷ Ma Bothe non cita il lavoro dei tre, in cui i due termini nella formula delle fluttuazioni *non richiedevano meccanismi separati*, contrariamente a quanto suggerito da Bothe e a quanto ipotizzato da Einstein, ma potevano essere spiegati all'interno di *un singolo consistente quadro dinamico*. Rientrava piuttosto nell'ambito del principio di complementarità che di lì a poco sarebbe stato proposto da Bohr e secondo cui la dualità onda-particella è diversa da quella originariamente immaginata da Einstein nel 1909. Non assume la coesistenza di due meccanismi diversi all'origine dei fenomeni, bensì l'esistenza di uno solo, che può essere descritto in modi diversi. La complementarità implicava anche la nozione che un sistema quantistico, a seconda del contesto sperimentale, può presentarsi o sotto forma di onde o sotto forma di particelle.

La sfida lanciata da Einstein con la formula delle fluttuazioni relativa all'enigma sulla dualità onda-corpuscolo della luce, era stata di fatto affrontata con successo. Il primo passo verso un allontanamento dalla teoria classica dell'elettrodinamica, richiesto da tempo dopo il successo del modello atomico di Bohr, era stato compiuto. Ma tutto ciò si applicava alle equazioni di Maxwell *nel vuoto*, ossia in assenza di cariche e correnti. Mentre ciò che interessa sono proprio le interazioni del campo con le cariche, come l'emissione e assorbimento di luce da parte degli atomi. Era dunque necessario fare un altro passo: studiare la quantizzazione del campo elettromagnetico in presenza di particelle cariche. L'interazione tra campo e particelle cariche doveva in primo luogo rendere conto dell'emissione e assorbimento di radiazione da parte dell'atomo e altri sistemi. Per scoprire come funzionava realmente il meccanismo per la creazione e l'annichilazione dei fotoni era necessario considerare l'accoppiamento di radiazione quantizzata con la materia. I primi passi di questo cammino furono intrapresi di lì a poco da Dirac.

Accoppiamento radiazione-materia secondo Dirac

Inizialmente Dirac mostrò una certa ostilità verso la meccanica ondulatoria di Schrödinger: “La ragione era che sentivo che avevamo già una meccanica quantistica del tutto

buona, che pensavo potesse essere sviluppata per trattare tutti i problemi della teoria atomica. Perché avremmo dovuto tornare indietro allo stadio pre-Heisenberg quando non avevamo una meccanica quantistica e cercare di costruirne una di nuovo?” [Dirac 1977, p. 131]. Gradualmente il suo atteggiamento cambiò e cominciò ad apprezzarla come una tecnica nuova per la ricerca degli autovalori e autovettori, così che, alla fine utilizzò l’equazione d’onda di Schrödinger come uno strumento matematico per il calcolo degli elementi di matrice, e nell’estate del 1926 la applicò al problema dei sistemi atomici a molte particelle ottenendo, come accennato in precedenza, un fondamentale risultato: insiemi di particelle identiche che obbediscono alla statistica di Bose o di Fermi vengono descritti rispettivamente da funzioni d’onda simmetriche e antisimmetriche [Dirac 1926]. Tuttavia, Dirac condivideva l’opinione di Heisenberg secondo cui soltanto la formulazione matriciale della meccanica quantistica determinava il contenuto fisico fornendo un’interpretazione di tutti i fenomeni microscopici, senza ricorrere a livello teorico ad alcun elemento ulteriore di carattere ondulatorio, come ribadiva nell’articolo: “ci consente di calcolare proprio le quantità che hanno una importanza fisica”. La teoria di Schrödinger semplicemente forniva un elegante metodo matematico per affrontare i problemi da un punto di vista pratico.

D’altro canto, al contrario di Schrödinger, Dirac fu scarsamente influenzato dalle idee di de Broglie, nella sua formulazione della meccanica quantistica. Nel periodo 1925-1926 l’uso del formalismo hamiltoniano, in cui era già molto esperto, lo portava a favorire la classica visione sottostante in termini di un insieme di particelle.

Negli sviluppi della teoria quantistica era comunque contenuta una certa forma di ambiguità. Sia Heisenberg che Dirac inizialmente considerarono la meccanica quantistica la giusta dinamica di *particelle* microscopiche, descritte in tal modo in termini di variabili con commutative q e p . Schrödinger, dal suo canto, concepiva la “funzione d’onda” Ψ come rappresentativa di un qualche tipo di *onda* e ne interpretava il modulo quadro $|\Psi|^2$ come una densità di materia elettronica. Secondo Schrödinger le *onde* rappresentavano le entità fondamentali. All’inizio fu appunto Jordan a vedere con maggior chiarezza la relazione tra i vari approcci.

Nel febbraio del 1927, durante un soggiorno a Copenhagen, Dirac pone i fondamenti dell’elettrodinamica quantistica studiando con questa procedura un sistema dinamico consistente in un atomo interagente con un campo di radiazione nel lavoro intitolato “The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation” [Dirac 1927] presentato dallo stesso Bohr.³⁸ Dirac sviluppa il metodo di Jordan per il campo elettromagnetico in un lavoro completato nel febbraio 1927. Già nell’agosto del 1926 Dirac era riuscito a fare una teoria dei coefficienti B di Einstein per le transizioni indotte, trattando gli atomi secondo la meccanica quantistica, ma considerando il campo di radiazione come un sistema classico. Ma non si poteva prendere in considerazione l’emissione spontanea “senza una teoria più elaborata che coinvolgesse la posizione dei vari atomi e l’interferenza delle loro emissioni individuali” [Dirac 1926].

Nella sua intervista con T. S. Kuhn del 14 maggio 1963 (*Archive for the History of Quantum Physics*), Dirac spiegò le origini del lavoro che segna quella che successivamente è stata considerata dai più la “nascita ufficiale” dell’elettrodinamica quantistica:³⁹ “Ricordo che questo lavoro ebbe origine dal semplice giocherellare con le equazioni... Stavo semplicemente giocando con l’equazione di Schrödinger. Ebbi l’idea di applicare a questa la quantizzazione e di elaborare ciò che veniva fuori e così scoprii che veniva fuori la statistica di Bose”. Lo scopo principale del lavoro era quello di costruire una teoria quantistica “dell’emissione di radiazione e della reazione del campo di radiazione sul sistema che lo emette”. Questo programma veniva messo in atto considerando l’hamiltoniana di un atomo interagente con un campo elettromagnetico e convertendo le grandezze classiche del campo in operatori quantomeccanici. Se le hamiltoniane venivano scritte per un sistema chiuso, cioè con termini che rappresentavano le energie dell’atomo, il campo e l’interazione, risultava possibile calcolare i coefficienti dell’emissione spontanea insieme a

quelli per l'emissione e l'assorbimento indotto, risolvendo così un problema rimasto in sospeso. Dirac scoprì anche un modo per scrivere l'hamiltoniana per la materia e la radiazione in termini dell'interazione dell'atomo con un insieme di quanti di luce. Questo gli forniva due espressioni equivalenti, i cui punti di partenza erano, rispettivamente, le onde e i quanti. Questa equivalenza, da una parte, e la traduzione delle variabili classiche del campo in operatori quantistici dall'altra, gli fornirono la base formale per capire la natura della luce. I due diversi aspetti del programma, quello legato alla statistica e il calcolo dei coefficienti di Einstein, trovavano un elemento unificante nella tecnica della cosiddetta "seconda quantizzazione".

La prima sezione inizia spiegando quali fossero i necessari presupposti e le problematiche da affrontare:

La nuova teoria quantistica, basata sull'ipotesi che le variabili dinamiche non obbediscano alla legge commutativa della moltiplicazione, è stata sufficientemente sviluppata, tanto da formare una teoria quasi completa della dinamica.

Si può trattare matematicamente il problema di un qualsiasi sistema dinamico composto di un certo numero di particelle con forze che interagiscono istantaneamente tra loro, a patto che sia descrivibile da una hamiltoniana e si può interpretare la matematica da un punto di vista fisico con un metodo generale ben definito. D'altra parte, praticamente nulla è stato fatto fino ad oggi sull'elettrodinamica quantistica. Non è stato toccato il problema di trattamento corretto di un sistema in cui le forze si propagano con la velocità della luce invece che istantaneamente o della creazione di un campo elettromagnetico di un elettrone in moto e della reazione di questo campo sull'elettrone. Inoltre vi è una seria difficoltà nell'elaborare una teoria che soddisfi a tutte le richieste dei principi della relatività ristretta, poiché l'hamiltoniana non può più essere usata. Il problema relativistico è naturalmente connesso ai precedenti e non è possibile risolvere completamente uno senza risolvere allo stesso tempo gli altri. Tuttavia sembra possibile costruire una teoria abbastanza soddisfacente dell'emissione della radiazione e della reazione del campo di radiazione sul sistema emittente sulla base di una cinematica e una dinamica non rigorosamente relativistiche. Questo è lo scopo principale del presente lavoro. La teoria è non relativistica solo nel senso che il tempo deve essere considerato un c -numero, invece di essere trattato in modo simmetrico rispetto alle coordinate spaziali. La variazione relativistica della massa con la velocità è stata presa in considerazione senza difficoltà.

La sezione introduttiva continua con l'esposizione di un programma dettagliato:

Le idee di fondo della teoria sono molto semplici. Consideriamo un atomo interagente con un campo di radiazione, che per essere precisi possiamo considerare confinato in una cavità in modo da avere soltanto un insieme discreto di gradi di libertà. Risolvendo la radiazione nelle sue componenti di Fourier, possiamo considerare l'energia e la fase di ciascuna componente come delle variabili dinamiche che descrivono il campo di radiazione... possiamo supporre che E_r e θ_r [la fase] formino una coppia di variabili canonicamente coniugate. In assenza di interazioni tra il campo e l'atomo, l'intero sistema sarà descrivibile

dall'hamiltoniana $H = \sum_r E_r + H_0$ uguale all'energia totale, essendo H_0 l'hamiltoniana

dell'atomo, poiché le variabili E_r e θ_r soddisfano ovviamente le equazioni canoniche del moto...

Quando c'è un'interazione tra il campo e l'atomo si potrebbe prendere in considerazione la teoria classica aggiungendo un termine di interazione all'hamiltoniana, che sarebbe una funzione delle variabili dell'atomo e delle variabili E_r e θ_r che descrivono il campo. Questo termine di interazione fornirebbe l'effetto della radiazione sull'atomo e anche la reazione dell'atomo sul campo di radiazione.

Affinché un metodo analogo possa essere usato nel caso della teoria quantistica, è necessario assumere che le variabili E_r e θ_r siano q -numeri [oggetti che non soddisfano la legge commutativa classica come i c -numeri] soddisfacenti le comuni condizioni quantistiche

$\theta, E_r - E, \theta_r = ih$, ecc., dove h è la usuale costante di Planck per $(2\pi)^{-1}$. Questa assunzione fornisce immediatamente alla radiazione le proprietà dei quanti di luce (corsivo mio)...⁴⁰

Se aggiungiamo ora alla hamiltoniana un termine di interazione (preso dalla teoria classica), il problema può essere risolto secondo le regole della meccanica quantistica e dovremmo aspettarci di ottenere i risultati corretti per l'azione reciproca tra radiazione e atomo. Si mostrerà che alla fine si ottengono le leggi corrette per l'emissione e l'assorbimento di radiazione e i corretti valori per gli A e B di Einstein... Si mostrerà anche che l'hamiltoniana che descrive l'interazione dell'atomo e con le onde elettromagnetiche può essere resa identica all'hamiltoniana per il problema dell'interazione dell'atomo con un insieme di particelle che si muovono alla velocità della luce e che soddisfano alla statistica di Bose-Einstein, con un'opportuna scelta dell'energia di interazione per le particelle. Il numero di particelle, aventi una determinata direzione del moto ed energia, che possono essere usate come variabili dinamiche dell'hamiltoniana per le particelle, è uguale al numero dei quanti di energia nell'onda corrispondente nell'hamiltoniana per le onde. Vi è così un'armonia completa fra la descrizione dell'interazione delle onde e dei quanti di luce (corsivo mio).

In realtà la ricerca di questa armonia, menzionata nel sommario introduttivo, non viene certo perseguita basandosi sulla visione ondulatoria: "Costruiremo ora la teoria dal punto di vista dei quanti di luce e mostreremo che l'hamiltoniana si trasforma naturalmente in una forma che assomiglia a quella per le onde". E in verità questa posizione trapasce chiaramente anche nel sommario conclusivo:

Viene trattato il problema di un insieme di sistemi simili che soddisfano la meccanica statistica di Bose-Einstein, interagenti con un altro sistema di tipo diverso, ottenendo una funzione hamiltoniana per la descrizione del moto. La teoria viene applicata all'interazione di un insieme di quanti di luce con un atomo e si mostra che da questo discendono le leggi di Einstein per l'emissione e l'assorbimento di radiazione.

Viene poi considerata l'interazione di un atomo con le onde elettromagnetiche e si è mostrato che, se si considerano le energie e le fasi delle onde come q -numeri soddisfacenti le appropriate condizioni quantistiche piuttosto che come c -numeri, la funzione hamiltoniana prende la stessa forma di quella relativa alla trattazione per quanti di luce. La teoria fornisce le corrette espressioni per gli A e B di Einstein.

Dal programma suddetto, evidentemente scritto a posteriori, appare evidente l'abituale strategia adottata da Dirac fin dal suo coinvolgimento nella costruzione della nuova teoria quantistica: sviluppare nuovo formalismo ed espandere la sua applicazione a un ventaglio sempre più ampio di problemi fisici. Il forte legame di Dirac con la meccanica analitica continua a giocare un forte ruolo nei suoi lavori sull'elettrodinamica quantistica. In questo caso era in gioco una posta assai alta: quella di ottenere una chiave di lettura per la comprensione di una questione centrale come quella della natura del legame tra "luce" e materia. Come era accaduto per Jordan, anche per Dirac il punto di riferimento – e allo stesso tempo la sfida – è rappresentato dal lavoro di Einstein.

Per descrivere un sistema di N particelle non interagenti con il campo di radiazione Dirac utilizzò due approcci distinti che possono essere caratterizzati rispettivamente come "corpuscolare" e "ondulatorio". Nell'approccio corpuscolare i quanti di luce sono descritti come un insieme di "particelle non interagenti in moto con la velocità della luce e soddisfacenti la statistica di Bose-Einstein".

Nella seconda sezione intitolata "The perturbation of an assembly of independent systems", Dirac considera "le transizioni prodotte in un sistema atomico da una perturbazione arbitraria" adottando i metodi esposti in [Dirac 1926, §5], che portano "in un modo semplice alle equazioni che determinano la probabilità del sistema di essere in uno stato stazionario del sistema imperturbato in un certo tempo" allo scopo di ottenere "il numero probabile di sistemi in quello stato in quell'istante per un insieme di sistemi che sono indipendenti fra loro e che sono tutti perturbati nello stesso modo". Il pun-

to centrale della seconda sessione è quindi quello di “mostrare che le equazioni per la velocità di cambiamento di questi numeri probabili possono essere messe in forma hamiltoniana in un modo semplice”, che a loro volta daranno origine ad ulteriori sviluppi nella teoria successiva.

Per descrivere un sistema di N particelle non interagenti Dirac considera l'hamiltoniana H_0 di un sistema atomico imperturbato così che $H = H_0 + V$ è l'hamiltoniana complessiva del sistema sotto l'influenza di una perturbazione V .

La funzione d'onda per il sistema totale (perturbato) soddisfa l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo $(H_0 + V)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$.

Se $\Psi = \sum_r a_r(t)\psi_r$ è la soluzione dell'equazione relativa al sistema perturbato che soddisfa le condizioni iniziali [con a_r coefficienti dell'espansione (funzioni solo del tempo) e ψ_r autofunzioni del sistema imperturbato, soluzioni dipendenti dal tempo dell'hamiltoniana imperturbata $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_r = H_0\psi_r$, e dove r classifica gli stati stazionari], allora $|a_r|^2$ è la probabilità che il sistema sia nello stato r istante per istante (i coefficienti a_r sono normalizzati all'inizio e restano tali). La teoria si applica direttamente ad un insieme di N sistemi simili indipendenti se si moltiplica ciascuna a_r per $N^{1/2}$ in modo tale che $\sum_r |a_r|^2 = N$ diventa il numero probabile di sistemi nello stato r e deve quindi essere un intero. Questo stabilisce una connessione diretta tra i numeri di occupazione e i coefficienti dell'espansione.⁴¹

A questo punto Dirac passa dalle variabili canoniche complesse a e a^* “alle variabili canoniche reali N_r e φ_r ” con la trasformazione $a_r = N_r^{1/2} \exp(-i\varphi_r/2)$ $a_r^* = N_r^{1/2} \exp(i\varphi_r/2)$: “Queste trasformazioni rendono le nuove variabili reali, essendo N_r uguale a $a_r a_r^* = |a_r|^2$, il numero probabile di sistemi nello stato r (corsivo mio) e φ_r la fase delle autofunzioni che li rappresentano”.

Dirac ritenne opportuno effettuare una seconda trasformazione introducendo le quantità

$$b_r = a_r \exp(-iW_r t / \hbar) \quad b_r^* = a_r^* \exp(-iW_r t / \hbar)$$

con W_r energia dello stato imperturbato ψ_r .

Anche queste sono variabili canoniche coniugate che soddisfano una certa hamiltoniana e introducendo la trasformazione vale la relazione $a_r a_r^* = |a_r|^2 = b_r b_r^* = |b_r|^2$.

Una nuova trasformazione simile a quella per le a_r , introduce la fase ϑ_r ,

$$b_r = N_r^{1/2} \exp(-i\vartheta_r / \hbar) \\ b_r^* = N_r^{1/2} \exp(i\vartheta_r / \hbar)$$

in modo da scrivere l'hamiltoniana per le variabili canoniche ϑ_r e N_r in cui compaiono due termini, l'energia dell'insieme e l'energia derivante dalla perturbazione:

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} \exp[i(\vartheta_r - \vartheta_s) / \hbar]$$

dove v_{rs} è collegato a V_{rs} dalla relazione $V_{rs} = v_{rs} \exp[\frac{i\hbar}{\hbar}(W_s - W_r)]$, in cui v_{rs} è una costante in quanto V non dipende esplicitamente dal tempo.

È evidente che Dirac sta cercando la nuova via attraverso l'uso di procedure che hanno dato risultati concreti nell'ambito della sua personale formulazione della nuova meccanica quantistica (*transformation theory* [Dirac 1927b]). L'intuizione fisica di Jordan si con-

trappone a un itinerario dall'apparenza macchinosa, che tuttavia riveste un ruolo rassicurante nel fornire una consistenza interna attraverso una serie di riscontri e verifiche che rappresentano una solida piattaforma a cui agganciare le novità.

Fino a questo punto Dirac ha utilizzato soltanto la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo e così nella terza sezione dal titolo "The perturbation of an assembly satisfying the Bose-Einstein statistics", concordemente a quanto mostrato nella precedente sezione, passa a "descrivere gli effetti di una perturbazione su un insieme di sistemi indipendenti per mezzo di variabili canoniche e equazioni hamiltoniane del moto". Disponendo ora di una hamiltoniana e di un insieme di variabili canoniche, quello che appare uno sviluppo della teoria "suggerito in modo naturale dalla stessa", è

...di rendere quelle variabili canoniche q -numeri, invece di c -numeri, soddisfacenti le usuali condizioni quantiche, in modo tale che le loro equazioni hamiltoniane del moto diventino vere equazioni quantistiche. La funzione hamiltoniana fornisce ora un'equazione d'onda di Schrödinger, che deve essere risolta ed interpretata nel modo solito. L'interpretazione non fornirà semplicemente il numero probabile di sistemi in uno stato qualsiasi, ma la probabilità di una qualsiasi particolare distribuzione del sistema fra i vari stati, essendo questa probabilità, di fatto, uguale al quadrato del modulo della soluzione normalizzata dell'equazione d'onda che soddisfa le appropriate condizioni iniziali... *Sarà mostrato che in generale l'equazione d'onda conduce al valore corretto della probabilità di una distribuzione data qualsiasi quando i sistemi obbediscono alla statistica di Bose-Einstein invece di essere indipendenti.*

A questo punto Dirac assume che le variabili b_r e ihb_r^* della sezione precedente "siano q -numeri canonici che soddisfano le condizioni quantiche"

$$[b_r, b_s^*] = \delta_{rs} \quad [b_r, b_s] = [b_r^*, b_s^*] = 0,$$

le quali garantiscono che l'operatore $b_r b_r^* = N_r$ quando è diagonale abbia autovalori interi. Le precedenti equazioni di trasformazione

$$b_r = N_r^{1/2} \exp(-i\theta_r / \hbar) \quad b_r^* = N_r^{1/2} \exp(i\theta_r / \hbar)$$

devono essere ora scritte nella forma quantistica

$$b_r = N_r^{1/2} e^{-\frac{i\theta_r}{\hbar}} \quad b_r^* = N_r^{1/2} e^{\frac{i\theta_r}{\hbar}} = e^{\frac{i\theta_r}{\hbar}} (N_r + 1)^{1/2}$$

affinché anche le θ_r e N_r possano essere variabili canoniche che soddisfano le regole di commutazione $[\theta_r, N_r] = i\hbar$ o, equivalentemente, $[e^{i\theta_r}, N_r] = e^{i\theta_r}$. "Queste equazioni mostrano che gli N_r possono assumere soltanto valori caratteristici interi non negativi (corsivo mio) che forniscono quindi la giustificazione per l'aver assunto che le variabili siano q -numeri secondo il modo scelto. *Gli abituali numeri quantici sono ora il numero di sistemi nei diversi stati*", secondo l'idea di Jordan.

Riscrivendo l'hamiltoniana F di cui sopra in termini delle variabili θ_r e N_r Dirac mostra che compare di nuovo un termine per l'energia propria e un termine per l'energia di interazione

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \exp[i(\theta_r - \theta_s) / \hbar].$$

Mentre l'equazione di Schrödinger può essere ora scritta in termini delle variabili N_r' , gli autovalori degli operatori N_r , notando che, in virtù delle precedenti regole di commu-

tazione, gli $e^{\frac{i\theta_r}{\hbar}}$ e $e^{-\frac{i\theta_r}{\hbar}}$ giocano il ruolo di operatori di creazione e distruzione. L'effetto dell'applicazione di questi operatori su una qualsiasi funzione $f(N_1', N_2', N_3', \dots)$ delle variabili

N_1', N_2', N_3', \dots fornisce infatti come risultato $e^{\pm \frac{i\theta_r}{\hbar}} f(N_1', N_2', \dots, N_r', \dots) = f(N_1', N_2', \dots, N_r' \pm 1, \dots)$.

Usando questa proprietà degli operatori $e^{\frac{i\partial_r}{\hbar}}$ nell'equazione d'onda

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots) = F \psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots)$$

e utilizzando per F l'espressione ottenuta si ha

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots) = \left[\sum_r W_r N'_r + \sum_{rs} v_{rs} (N'_r)^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \right] \psi(N'_1, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots) .$$

“Si vede dal lato destro di questa equazione – osserva Dirac – che nella matrice che rappresenta F , il termine in F che coinvolge $\exp[i(\vartheta_r - \vartheta_s)/\hbar]$ contribuisce solo a quegli elementi di matrice che fanno riferimento *alle transizioni in cui N_r decresce di una unità e N_s cresce di una unità...*” (corsivo mio). Se si trova una soluzione $\Psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots)$ che è normalizzata, cioè tale che

$$\sum_{N'_1, N'_2} |\psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots)|^2 = 1$$

e che soddisfa alle condizioni iniziali, “*allora $|\psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots)|^2$ è la probabilità della distribuzione in cui N'_1 sistemi sono nello stato 1, N'_2 sistemi sono nello stato 2... in un dato istante*” (corsivo mio). Ciascun insieme degli argomenti della funzione d'onda rappresenta una particolare distribuzione dell'insieme dei sistemi su tutti i possibili stati.⁴²

Attraverso la trattazione di Dirac l'interpretazione di Jordan assume qui una fisionomia molto più circostanziata e poiché apparentemente si sono quantizzati nuovamente gli operatori b_r nell'ambito di una descrizione quantomeccanica attraverso (“prima quantizzazione: uso dell'equazione di Schrödinger) questa procedura ha generato l'espressione “seconda quantizzazione” anche se in effetti non riguarda la quantizzazione del campo classico di onde di materia descritte appunto dall'equazione di Schrödinger.⁴³ Piuttosto è un'applicazione della teoria delle trasformazioni di Dirac, che rappresenta il cuore della sua interpretazione fisica della meccanica quantistica, secondo cui il vettore di stato viene espresso in termini delle variabili N'_1, N'_2, N'_3, \dots , il che garantisce che le particelle descritte soddisfano la statistica di Bose-Einstein poiché soltanto il numero di occupazione in ciascuno stato r viene specificato e ciascun N'_r può assumere i valori $= 0, 1, 2, \dots$ ⁴⁴ In effetti la natura “bosonica” dei quanti di luce rappresentò la caratteristica essenziale dedotta dalla seconda quantizzazione di Dirac, di fatto un modo formale per garantire tale proprietà.

Più avanti, nella sezione 6, Dirac applica questo “al caso in cui i sistemi dell'insieme siano i quanti di luce, essendo la teoria utilizzabile poiché i quanti di luce obbediscono alla statistica di Bose-Einstein e non hanno interazioni mutue” e riesce a mostrare che *le probabilità di un processo di assorbimento e di emissione* seguono le “leggi di Einstein”. La “seconda quantizzazione”, nel conferire alla radiazione proprietà tipiche dei quanti di luce, introduce alcune caratteristiche del tutto nuove che Dirac mise debitamente in evidenza: “Il quanto di luce ha la peculiarità che *apparentemente cessa di esistere* quando si trova in uno particolare dei suoi stati stazionari, cioè lo stato zero. Quando un quanto di luce viene assorbito si può considerare che salti in questo stato zero e quando viene emesso si può considerare che salti dallo stato zero a uno nel quale sia fisicamente evidente, in modo da *apparire come se fosse stato creato*. Poiché non c'è limite al numero di quanti che possono essere creati in questo modo, dobbiamo supporre che ci sia un *numero infinito* di quanti di luce nello stato zero” (corsivo mio).

Per calcolare “i coefficienti della probabilità di emissione e di assorbimento” nella sezione 7, Dirac considera “l'interazione tra atomo e radiazione dal punto di vista ondulatorio” (“Scomponiamo la radiazione nelle sue componenti di Fourier e supponiamo che il loro numero sia molto grande, ma finito...”) e suppone, come nella sezione introdutti-

va, di descrivere il campo attraverso le variabili canoniche N_r e r , dove N_r è il numero dei quanti di energia della componente r e ϑ_r la sua fase canonicamente coniugata.⁴⁵ Ciascuna componente può essere descritta da un potenziale vettore scelto in modo che il potenziale scalare sia nullo (*gauge di Coulomb*) e il termine perturbativo da aggiungere alla hamiltoniana dell'atomo e del campo di radiazione imperturbati è, in accordo con la teoria

classica, della forma $H_{\text{int}} = -\frac{e}{c} A(x,t) \frac{d}{dt} x(t)$ dove $x(t)$ si riferisce alla posizione dell'elettrone.

Si tratta di un'espressione classica per l'accoppiamento del potenziale vettore con la derivata rispetto al tempo del momento elettrico di dipolo dell'atomo. Secondo le regole generali della meccanica quantistica il termine perturbativo nell'hamiltoniana del sistema atomo più radiazione indurrà transizioni dallo stato iniziale $i = [n, n_j(\mathbf{k})]$ allo stato finale $f = [m, n_j(\mathbf{k}')]]$ dove n e m sono numeri quantici relativi al sistema atomico nello stato iniziale e nello stato finale, mentre gli n_j sono relativi ai fotoni. All'ordine più basso la probabilità di transizione è proporzionale a $|H_{fi}|^2$ dove $H_{fi} = H_{[m, n_j(\mathbf{k}')] [n, n_j(\mathbf{k})]}^{\text{int}}$. Cosa rappresentano

questi elementi di matrice? Il fattore $\frac{d}{dt} x(t)$ consente la transizione tra stati atomici. Il

gioco è fatto ricordando che a sua volta il potenziale vettore A dipende linearmente dagli operatori di creazione e di annichilazione e quindi consente la transizione dovuta a questi operatori in cui uno degli $n_j(\mathbf{k})$ è aumentato di uno, oppure diminuito di uno. L'interpretazione dovuta a tale azione porta quindi alla creazione o all'annichilazione di un fotone!

Dopo aver scritto l'hamiltoniana per il sistema atomo interagente con il campo di radiazione e aver trasformato le variabili canoniche in q -numeri, Dirac osserva che questa hamiltoniana, costruita partendo dal punto di vista ondulatorio attraverso una procedura di quantizzazione, coincide da un punto di vista formale con l'hamiltoniana dell'insieme dei quanti di luce interagenti con l'atomo già ricavata precedentemente con il metodo della seconda quantizzazione: "Il punto di vista ondulatorio è così consistente con il punto di vista dei quanti di luce" e a questo punto Dirac mostra come questa hamiltoniana "conduca alla corretta espressione per i coefficienti A e B di Einstein".⁴⁶

Nel lavoro di Dirac vediamo per la prima volta in piena azione la teoria quantistica dei campi, che sostituisce il vecchio "gioco delle biglie". Se consideriamo un particolare stato contenente n fotoni (per qualche j e \mathbf{k} fissati) segue dalle proprietà degli operatori di creazione e distruzione e dagli elementi di matrice H_{fi} , che la probabilità per l'assorbimento ($n \rightarrow n - 1$, per azione di a) è proporzionale a n (il numero di quanti nello stato r):

$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Mentre quello per l'emissione ($n \rightarrow n + 1$, per azione di a^+) è proporzionale a $n + 1$: $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Questo $n + 1$ consiste di due parti. La parte n corrisponde

ai processi indotti, proporzionali alla densità di radiazione presente, come nei termini B delle equazioni ottenute da Einstein. L'1 invece rende conto delle n emissioni spontanee indipendenti, i termini A di Einstein. I due meccanismi di emissione sono evidentemente correlati in modo semplice. Questo modo di descrivere i fenomeni aveva delle implicazioni del tutto inedite: per la prima volta si mostrava che un sistema non deve necessariamente contenere delle particelle per poterle emettere.

Fu quindi il primo grande risultato nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica che nel suo primo lavoro Dirac fosse stato in grado di derivare la relazione di Einstein da principi primi, il tutto nell'ambito di una riconciliazione tra aspetti corpuscolari e ondulatori della radiazione elettromagnetica.

In un contributo sull'origine della teoria quantistica dei campi presente nel volume *The Birth of particle physics* [Dirac 1983], Dirac tornò a caratterizzare i due approcci come segue:

Invece di lavorare seguendo uno schema dei fotoni come particelle, si possono invece utilizzare le componenti del campo elettromagnetico. In questo modo si ottiene una completa armonia fra le teorie ondulatoria e corpuscolare della luce. Si può trattare la luce come composta di onde elettromagnetiche, trattando ciascuna onda come un oscillatore; alternativamente, si può trattare la luce come composta da fotoni, essendo i fotoni dei bosoni e ciascuno stato del fotone corrispondente a uno degli oscillatori del campo elettromagnetico. In questo modo si ottiene una riconciliazione delle teorie corpuscolare e ondulatoria della luce. Esse non rappresentano quindi altro che due descrizioni matematiche della stessa realtà fisica.

In un lavoro immediatamente successivo Dirac, nel sottolineare quanto fossero discutibili i metodi che utilizzavano in modo ambiguo le analogie con la teoria classica, anche quando queste apparivano “oscure o inesistenti”, sostenne con forza il suo metodo che, senza dipendere dalle analogie classiche, di fatto poggiava “su una base più definita” acquistando un carattere più generale che gli consentiva di andare oltre e descrivere fenomeni che non avevano un analogo classico [Dirac 1927c]. Nel giro di qualche mese, il 2 gennaio 1928, Dirac avrebbe proposto la sua teoria quantistica dell’elettrone relativistico, una pietra miliare nello sviluppo della fisica del XX secolo.⁴⁷

Il lavoro di Dirac fu così commentato da Gregor Wentzel, che diede significativi contributi allo sviluppo dell’elettrodinamica quantistica negli anni ’20 [Wentzel 1960]:

Oggi la novità e il coraggio dell’approccio di Dirac al problema della radiazione possono risultare difficili da apprezzare. Durante la decade precedente era diventata una tradizione quella di pensare al principio di corrispondenza di Bohr come a una guida suprema in tali questioni e, in effetti, gli sforzi per formulare questo principio in una maniera quantitativa avevano condotto alle idee essenziali che prepararono la successiva scoperta della meccanica delle matrici di Heisenberg.

Sebbene nella prima metà degli anni ’20 fosse stato ottenuto un certo successo nella descrizione di processi come l’effetto fotoelettrico, non c’era alcuna possibilità all’interno del principio di corrispondenza di comprendere il processo dell’emissione spontanea o la scomparsa dei fotoni. La spiegazione di Dirac... arrivò come una rivelazione.

“Seconda quantizzazione” per i fermioni: Jordan, Klein e Wigner

A quel tempo il problema della diversità tra fermioni e bosoni, entrambi particelle indistinguibili ma soggette rispettivamente a due diversi tipi di statistica, sembrava un ostacolo insuperabile.

Il problema a questo punto era quindi quello di mostrare come il formalismo potesse fornire particelle che – come gli elettroni – seguivano la statistica di Fermi-Dirac. La via aperta da Dirac mostrava come fare per risolverlo, anche se quest’ultimo aveva affermato che il nuovo metodo non avrebbe funzionato nel caso di particelle che obbedivano alla statistica di Fermi invece che a quella di Bose [Dirac 1927, p. 247].

Nella rappresentazione di Dirac in cui gli N_r erano diagonali, particelle che obbedivano alla statistica di Bose-Einstein avevano autovalori per l’operatore N_r del tipo $N_r = 0, 1, 2, 3, \dots$. Un numero arbitrario di particelle poteva condividere lo stesso stato. Per particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac il principio di esclusione, formulato da Pauli nel 1925, proibisce numeri di occupazione maggiori di 1 e quindi i valori potevano essere soltanto 0 e 1, così gli operatori N_r potevano essere rappresentati soltanto da matrici 2×2 :

$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r$. Poiché $[N_r, e^{i\theta_r}] = e^{i\theta_r}$, Jordan suggerì che $\vartheta_r = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che effettivamente soddisfa le suddette regole di commutazione. Si può anche verificare che

$$b_r = e^{-i\theta_r} N_r^{1/2} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r.$$

Seguendo le tracce di Dirac, con questi operatori Jordan scrisse un'equazione di Schrödinger con l'hamiltoniana perturbativa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left\{ \sum_r W_r b_r^* b_r + \sum_{r,s} v_{rs} b_r^* b_s \right\} \psi$$

mostrando che corrispondeva alla descrizione di un sistema di fermioni identico a quello fornito dalle funzioni d'onda antisimmetriche nello spazio delle configurazioni: "...i risultati ottenuti lasciano pochi dubbi sulla possibilità di formulare una teoria quantistica della materia dove gli elettroni sono rappresentati da onde quantizzate nel comune spazio tridimensionale – sebbene gli elettroni soddisfino la statistica di Pauli piuttosto che quella di Bose – e che la naturale formulazione della teoria quantistica degli elettroni si ottenga dal concepire simultaneamente radiazione e materia nello spazio tridimensionale". Più avanti osservava ancora: "Il punto fondamentale della teoria dell'elettrone, *l'esistenza di particelle dotate di carica elettrica discreta*, qui appare rappresentare un fenomeno quantomeccanico caratteristico, da ritenersi equivalente al fatto che le onde di materia compaiono soltanto in stati quantici discreti..." [Jordan 1927].

Questo lavoro di Jordan sulla quantizzazione di Fermi dei campi di materia fu il primo di una serie di cinque lavori nei quali sviluppò le sue idee sulla quantizzazione dei campi e che nel seguito considerò tra le sue opere più importanti nel campo della fisica teorica (anche se quello di cui era più orgoglioso in assoluto fu la derivazione delle fluttuazioni in un campo di onde quantizzate nel *Dreimännerarbeit*). Due furono scritti da lui e gli altri tre furono scritti con Klein [Jordan, Klein 1927], con Pauli [Jordan, Pauli 1928] e con Wigner [Jordan, Wigner 1927]. Nel lavoro scritto con Klein nella primavera del 1927 i due svilupparono una generalizzazione della trattazione di Dirac per i bosoni in modo da includere le interazioni tra bosoni. Partirono da un'equazione di Schrödinger con un termine non lineare per tenere conto dell'interazione. Partendo dalla visione ondulatoria trovarono che le regole di commutazione imposte alle variabili del campo facevano emergere particelle che obbedivano alla statistica di Bose-Einstein. Apparve a Jordan che quantizzando l'onda, sottoponendola alle stesse restrizioni della visione particellare, le due diventavano equivalenti [Jordan, Klein 1927].

Jordan si rifaceva molto alla visione di de Broglie, Einstein e Schrödinger secondo cui i campi erano le entità primarie. Considerava la "seconda quantizzazione" di Dirac come la quantizzazione di un campo classico, così la applicò ai *campi di materia* come aveva fatto per il campo elettromagnetico. Il suo punto di vista fu accolto a quel punto da Pauli che insieme a Heisenberg era d'accordo nel considerare la quantizzazione dei campi di materia l'approccio corretto in direzione di una formulazione relativistica della meccanica quantistica. Nel febbraio 1928 Heisenberg scriveva a Dirac: "Sto scrivendo un lavoro con Pauli... la teoria è una generalizzazione del lavoro di Klein-Jordan e di Pauli-Jordan..." [Schweber 1994, p. 37].

Jordan scrisse poi un altro lavoro con Wigner in cui perfezionava il discorso relativamente ai fattori di fase necessari a garantire che gli operatori di creazione per differenti stati dell'energia anticommutassero l'uno con l'altro [Jordan, Wigner 1927] completando così la formulazione della teoria. Le regole di *anticommutazione* di Jordan e Wigner erano $[a_r, a_s^\dagger]_+ = \{a_r, a_s^\dagger\} = a_r a_s^\dagger + a_s^\dagger a_r = \delta_{rs}$, $\{a_r, a_s\} = \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0$. In particolare, considerando che $a_r^{\dagger 2} = a_r^2 = 0$, non risulta possibile creare dallo stato zero (stato di vuoto) uno stato di due particelle identiche: $a_r^{\dagger 2} |0\rangle = 0$, compatibilmente con il principio di esclusione.

Le reazioni furono discordanti. Heisenberg era entusiasta. La maggior parte dei fisici avevano l'impressione che la matematica avesse un carattere troppo astruso e oscuro. Lo stesso Dirac si lamentò che la statistica di Fermi non veniva fuori naturalmente, ma solo attraverso un modo singolare di quantizzare le onde, scelto apposta per ottenere il risultato. Nel caso della statistica di Bose sembrava che ci fosse una visione definita sotto alle

equazioni, la teoria veniva applicata a un insieme di oscillatori. Questo non accadeva nel caso della statistica di Fermi: “Nel caso dei bosoni avevano ... operatori strettamente connessi con le variabili dinamiche che descrivono gli oscillatori. Avevano operatori che erano dotati di un analogo classico. Nel caso degli operatori di Jordan-Wigner, non avevano affatto un analogo ed erano molto strani da un punto di vista classico. I quadrati di ciascuno di loro erano uguali a zero. Era una situazione che non mi piaceva” [Dirac, 1983]. Di fatto, questa teoria iniziava a far luce su uno degli aspetti più profondi della natura: *l'esistenza di differenti, e allo stesso tempo del tutto indistinguibili, copie delle particelle elementari*. L'esistenza di classi di particelle indistinguibili, a sua volta strettamente connessa all'assegnazione di una ben precisa statistica quantica per ciascuna classe, trovava così un suo chiaro inquadramento logico all'interno della teoria.

L'anno 1927 si chiude idealmente con il quinto Convegno Solvay dal titolo *Elettroni e Fotoni*, dedicato alla nuova meccanica quantistica. Tra i relatori Compton, Born, de Broglie, Heisenberg e Schrödinger. Il Solvay del 1927 è rimasto famoso per le accese discussioni tra Bohr e Einstein che aprirono ufficialmente il grande dibattito epistemologico sulle questioni fondamentali concernenti l'interpretazione della meccanica quantistica. In quella occasione Bohr ebbe occasione di presentare le sue idee sul principio di complementarità, che già aveva anticipato nel convegno tenuto nel mese di settembre a Como per le celebrazioni del primo centenario della morte di Alessandro Volta.

È interessante osservare come, nelle considerazioni finali, dopo aver citato il lavoro di Dirac come “forma più rigorosa” per affrontare il problema della radiazione mediante metodi quantomeccanici, Bohr affronti il problema derivante dalle “difficoltà incontrate nei tentativi di dar conto dell'individualità di particelle cariche fondamentali basandosi sui principi generali della meccanica e dell'elettrodinamica”. In particolare, nelle ultime righe della sua relazione fa riferimento al “principio di esclusione di Pauli, così importante per il problema della costituzione atomica” e conclude sottolineando come fosse da escludere

la speranza di chiarire per mezzo dei metodi fino ad ora utilizzati la differenza espressa attraverso questo principio tra il comportamento delle particelle cariche fondamentali e quello degli enti noti come quanti di luce. Tale spiegazione sembrerebbe possibile soltanto per mezzo di una razionale formulazione quanto-teoretica della teoria generale di campo, in cui le particelle cariche fondamentali hanno trovato la loro naturale collocazione” [Bohr 1928].

Stimolati dai risultati ottenuti da Jordan e Wigner, fin dal gennaio 1928 Heisenberg e Pauli avevano deciso di affrontare la formulazione di una elettrodinamica quantistica con interazioni in presenza di cariche e correnti. Il loro programma venne portato a compimento inventando un metodo per quantizzare il campo nel quale furono guidati dalla teoria di campo classica in forma lagrangiana. Il loro fu il primo lavoro in cui l'elettrodinamica quantistica si occupava del caso in cui l'elettrone obbedisce alla equazione relativistica appena formulata da Dirac [Heisenberg, Pauli 1929]. Il cammino verso una teoria soddisfacente era soltanto all'inizio.

Il formalismo di Jordan e Wigner aveva preparato lo scenario per la teoria di campo dell'elettrone-positrone. Grazie alle potenzialità dell'approccio della teoria quantistica dei campi, la centralità del concetto di emissione e assorbimento dei quanti ebbero di lì a poco una eclatante conferma nella teoria di Fermi del decadimento beta – modellata proprio sull'analogia con l'elettrodinamica quantistica – e nella teoria di Yukawa delle forze nucleari. Entrambi suggerivano come la teoria quantistica dei campi fosse l'ambito naturale in cui tentare di capire quelle che oggi chiamiamo interazioni deboli e interazioni forti. La teoria quantistica dei campi emerge allora come una nuova teoria in cui le particelle possono essere create e distrutte e l'esistenza di antiparticelle trova una sua comprensione e giustificazione. La teoria di Fermi, nel segnare un mutamento radicale del concetto di processo “elementare”, renderà manifesto il potere della descrizione teorica per mezzo

dei campi quantici. Da quel momento la fisica delle particelle acquisterà il suo proprio specifico linguaggio. Da quel momento la domanda *quanto sono valide le previsioni della teoria quantistica dei campi?* diventerà uno dei temi centrali della fisica del Novecento.⁴⁸

Bibliografia

- BERGIA, S. (1998) *Einstein*, Le Scienze.
- BERGIA, S. (2005) "I primi passi dell'elettrodinamica quantistica" in *Le Scuole di Storia della Fisica, La Fisica nella scuola*, Quaderno 17, ottobre-dicembre 2005.
- BERNARDINI, C. (2005) "Gli operatori di creazione e distruzione" in *Le Scuole di Storia della Fisica, La Fisica nella scuola*, Quaderno 17, ottobre-dicembre 2005.
- BOHR, N. (1922) "Der Bau der Atome und die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Elemente", *Zeitschrift für Physik* 9, 1; The Structure of the Atom, Nobel lecture, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1922/bohr-lecture.html.
- BOHR, N. (1923) "Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Die Grundpostulate der Quantentheorie", *Zeitschrift für Physik* 13, 117.
- BOHR, N. (1925) "Über die Wirkung von Atomen bei Stößen", *Zeitschrift für Physik* 34, 142.
- BOHR, N., KRAMERS, H.A. e SLATER, J.C. (1924) "The quantum theory of radiation", *Philosophical Magazine* 47, 785.
- BOHR, N. (1928) "The quantum postulate and the recent development", in *Atti del congresso Internazionale dei fisici*, 11-20 settembre 1927, Zanichelli, 565.
- BORN, M. e JORDAN P. (1925) "Zur Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik* 34, 858.
- BORN, M., HEISENBERG, W. e JORDAN, P. (1926) "Zur Quantenmechanik. II.", *Zeitschrift für Physik* 35, 557.
- BOSE, S.N. (1924) "Planck Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Zeitschrift für Physik* 44, 214.
- BOSE, S.N. (1924) "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Annalen der Physik* 26, 178.
- BOTHE, W. (1923) "Zur Quantentheorie des normalen Photoeffektes", *Zeitschrift für Physik* 17, 137.
- BOTHE, W. e GEIGER, H. (1925) "Über das Wesen des Comptoneffekts; ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung", *Zeitschrift für Physik* 32, 639.
- BOTHE, W. (1926) "Über die Kopplung zwischen elementaren Strahlungsvorgängen", *Zeitschrift für Physik* 37, 547.
- COMPTON, A.H. (1923) "A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by light Elements", *Physical Review* 21, 483.
- COMPTON, A.H. e SIMON, A.W. (1925) "Directed Quanta of Scattered X-Rays", *Physical Review* 26, 289.
- DARRIGOL, O. (1986) "The origin of quantized matter waves", *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 16, 197.
- DAVISSON, C. (1937) *The Discovery of Electron Waves*, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/davison-lecture.html.
- DEBYE, P. (1910) "Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung", *Annalen der Physik* 33, 1427.
- DIRAC, P.A.M. (1926) "On the Theory of Quantum Mechanics", *Proceedings of the Royal Society* A112, 661.
- DIRAC, P.A.M. (1927) "The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation", *Proceedings of the Royal Society* A 114, 243.
- DIRAC, P.A.M. (1927b) "The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics", *Proceedings of the Royal Society* A 113, 621.
- DIRAC, P.A.M. (1927c) "The Quantum Theory of Dispersion", *Proceedings of the Royal Society* A 114, 710.
- DIRAC, P.A.M. (1971) *I principi della meccanica quantistica*, Bollati Boringhieri.
- DIRAC, P.A.M. (1977), "Recollections of an exciting era", in *History of Twentieth Century Physics*, a cura di C. Weiner, Academic Press, 109.
- DIRAC, P.A.M. (1983) "The origin of quantum field theory", in *The birth of particle physics*, a cura di L. M. Brown e L. Hoddeson, Cambridge University Press 1983.
- EHLERS, J. (2007) "Pascual Jordan's Role in the Creation of Quantum Field Theory", in *Pascual Jordan (1902-1980), Mainzer Symposium zum 100. Geburtstag*, a cura di J. Ehlers, D. Hoffmann, J. Renn, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 23.
- EHRENFEST, P. (1906) "Zur Planckschen Strahlungstheorie", *Physikalische Zeitschrift* 7, 528.
- EHRENFEST, P. (1925) "Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition quantisierter Eigenschwingungen", *Zeitschrift für Physik* 34, 362.
- EINSTEIN, A. (1905) "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", *Annalen der Physik* 17, 132.
- EINSTEIN, A. (1906) "Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption", *Annalen der Physik* 20, 199.
- EINSTEIN, A. (1909) "Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems", *Physikalische Zeitschrift* 10, 185.

- EINSTEIN, A. (1909b) "Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung", *Deutsche Physikalische Gesellschaft Verhandlungen* 11, 482.
- EINSTEIN, A. (1916) "Strahlungs-emission und -absorption nach der Quantentheorie", *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft* 18, 13 e 14, 318.
- EINSTEIN, A. (1917) "Zur Quantentheorie der Strahlung", *Physikalische Zeitschrift* 18, 121.
- EINSTEIN, A. (1924) "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 261.
- EINSTEIN, A. (1925) "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung", *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 3; Quantentheorie des idealen Gases", *ibid.*, 18.
- EINSTEIN, A. (1988) *Opere Scelte* a cura di E. Bellone, Boringhieri 1988.
- FABRI, E., "Breve storia dell'elettrodinamica quantistica", <http://www.df.unipi.it/~fabri/divulgazione/qed/qed0.htm>.
- FABRI, E. "Nascita e sviluppo dell'idea di fotone", in *Le Scuole di Storia della Fisica, La Fisica nella scuola*, Quaderno 17, ottobre-dicembre 2005.
- FEYNMAN, R.P. (1989) *QED. La strana storia della luce e della materia*, Adelphi.
- HEISENBERG, W. (1925) "Über die quantentheoretische Umdeutung Kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Zeitschrift für Physik* 33, 879.
- HEISENBERG, W. (1926) "Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik* 38, 411.
- HEISENBERG, W. e PAULI, W. (1929) "Zur Quantendynamik der Wellenfelder", *Zeitschrift für Physik* 59, 168.
- JEANS, J. H. (1905) "The Dynamical Theory of Gases", *Nature* 71 N. 1852, 607; "The Dynamical Theory of Gases and of Radiation", *Nature* 72 N. 1857, 101; "A Comparison between Two Theories of Radiation", *Nature* 72 N. 1865, 293; "On the Laws of Radiation", *Proceedings of the Royal Society* A76, 545.
- JORDAN, P. (1927) "Zur Quantenmechanik der Gasentartung", *Zeitschrift für Physik* 44, 473.
- JORDAN, P. e KLEIN, O. (1927) "Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie", *Zeitschrift für Physik* 45, 751.
- JORDAN, P. e PAULI, W. (1928) "Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder", *Zeitschrift für Physik* 47, 151.
- JORDAN, P. e WIGNER, E. (1928) "Über das Paulische Äquivalenzverbot", *Zeitschrift für Physik* 47, 631.
- JOST, R. (1972) "Foundation of Quantum Field Theory", in *Aspects of Quantum Theory*, a cura di A. Salam e E. P. Wigner, Cambridge University Press, 61.
- HEITLER, W. (1936), *Quantum Theory of Radiation*, Clarendon Press (1ª edizione).
- LOCHAK, G. (1984) "De Broglie's initial conception of de Broglie waves", in *The Wave-particle dualism. A tribute to Louis de Broglie On his 90th birthday*, a cura di S. Diner, Kluwer Ac. Publishers, 1.
- MANDL, F. e SHAW, G. (2001) *Quantum Field Theory*, Wiley & Sons.
- MEHRA, J. (2001) "The Origin of quantum field theory", in *The Golden Age of Theoretical Physics*, World Scientific.
- MILLER, A.I. (1995) *Early Quantum Electrodynamics: A Source Book*, Cambridge University Press.
- MILLIKAN, R.A. (1924) "The electron and the light-quant from the experimental point of view", http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1923/millikan-lecture.pdf.
- MOYER, D.F. (1981) "Origins of Dirac's electron", 1925-1928, *American Journal of Physics* 49, 944.
- PAIS, A. (1979) "Einstein and the quantum theory", *Reviews of Modern Physics* 51, 863.
- PAIS, A. (1991) *Sottile è il signore... La scienza e la vita di Albert Einstein*, Bollati Boringhieri, 1991.
- PAIS, A. (1983) *Inward Bound. Of matter and forces in the physical world*, cap. 15, Trade Paperback.
- PEIERLS, R.E., SALAM, A., MATTHEWS P.T. e FELDMAN, G. (1955) "A Survey of Field Theory", *Reports on Progress in Physics* 18, 423.
- RAYLEIGH, J.W.S. (1900) "The Law of Partition of Kinetic Energy", *Philosophical Magazine* 49, 98.
- RAYLEIGH, J.W.S. (1905) "The Dynamical Theory of Gases", *Nature* 71 N. 1850, 559; "The Dynamical Theory of Gases and of Radiation", *Nature* 72 N. 1855, 54; "The Constant of Radiation as Calculated from Molecular Data", *Nature* 72 N. 1863, 243.
- SAKURAI, J.J. (1967) *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley.
- SCHWEBER, S.S. (1994) *Q.E.D. and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press.
- SCHWINGER, J. (1958) *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover Publications Inc.
- SLATER, J.C. (1925) "A quantum Theory of Optical Phenomena", *Physical Review* 25, 395.
- STUEWER, R. (1975) *The Compton Effect: Turning Point in Physics*, Science History Publications, New York.
- WENTZEL, G. (1960) Quantum theory of fields (until 1947), in *Theoretical physics in the twentieth century. A memorial volume to Wolfgang Pauli* a cura di M. Fierz e V. F. Weisskopf, Interscience Publishers, 48.
- WEISSKOPF, V. (1983) "Development of quantum electrodynamics", in *The birth of particle physics*, a cura di L. M. Brown e L. Hoddeson, Cambridge University Press.
- WILCZEK, F. (1999) "Quantum field theory", *Reviews of Modern Physics* 71, N. 2. Centenary, S85.
- WHITTAKER, E.T. (1937) *A treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press.

Note

- ¹ Desidero ringraziare Luigi Brasini per l'attenta lettura del testo e per una serie di utili osservazioni.
- ² La formulazione di base fu elaborata da Lord Rayleigh nel 1900. Lui stesso, riprendendo il lavoro del 1900, scrisse l'espressione esplicita per la densità di energia in cui fu introdotta da Jeans la correzione di un errore numerico di un fattore 8 commesso da Rayleigh nella sua prima valutazione del coefficiente $8\pi/c^3$ [Rayleigh 1900, Rayleigh 1905, Jeans 1905]. È da notare che le note del 1905, pubblicate su *Nature*, si alternano a breve distanza e sono caratterizzate da un dibattito non privo di toni polemici.
- ³ Secondo la valutazione di Rayleigh e Jeans calcolata sulla base dell'elettromagnetismo classico, il numero di modi elettromagnetici in una cavità tridimensionale, per unità di frequenza, è proporzionale al quadrato della frequenza. Questo di conseguenza implica che anche la potenza irradiata per unità di frequenza deve seguire la legge di Rayleigh-Jeans, ed essere quindi proporzionale al quadrato della frequenza. Quindi, sia la potenza a una data frequenza, sia la potenza totale irradiata vanno all'infinito quando sono considerate frequenze sempre più alte.
- ⁴ Successivamente, Millikan verificò sperimentalmente l'equazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico e fece la prima determinazione sperimentale diretta della costante di Planck (1912-1915). Per questi lavori ebbe il Nobel per la fisica nel 1923. Si veda la sua Nobel Lecture "The Electron and the Light-Quant from the Experimental Point of View" [http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1923/millikan-lecture.html].
- ⁵ Si veda più avanti la discussione sulle statistiche quantistiche di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac.
- ⁶ Così come un singolo oscillatore armonico è caratterizzato da una frequenza naturale, in generale ogni sistema vibrante contenente oscillatori accoppiati è caratterizzato da vari modi di oscillazione, ciascuno dei quali agisce come un semplice oscillatore armonico. I modi normali di un sistema sono quindi quelle combinazioni lineari delle coordinate degli oscillatori accoppiati che si ottengono mediante coefficienti che sono elementi di matrici diagonalizzabili tali che ciascuna combinazione, dopo la diagonalizzazione si comporta come un oscillatore semplice. Vedi [Whittaker 1937].
- ⁷ Il risultato ottenuto da Rayleigh e Jeans $\rho(v,T)dv = kT \cdot N_v dv = \frac{8\pi kT}{c^3} v^2 dv$ coincide con la legge di Planck $\rho(v,T) = \frac{8\pi h v^3}{c^3 (e^{hv/kT} - 1)}$ nel limite $hv \ll kT$ in cui predomina la natura ondulatoria della radiazione rispetto alle caratteristiche "corpuscolari" degli oscillatori.
- ⁸ Qui Einstein allude alla "teoria dell'emissione", cioè al concetto newtoniano di luce come un flusso di corpuscoli.
- ⁹ G. Lochak, ha tuttavia sottolineato come l'idea principale di de Broglie non fosse quella del dualismo, bensì della *coesistenza* di onde e particelle. In questo senso la sua visione si allontanava da quella di Bohr che credeva in una sorta di ente fisico a doppia faccia, che ci appare in alcune circostanze come una particella e in altre come un'onda. Al contrario, de Broglie riteneva che esistesse *un unico ente* che è sempre *contemporaneamente e allo stesso tempo* particella e onda ed è tale che le proprietà della particella che vengono osservate sono guidate - controllate - dalla struttura ondulatoria del sistema [Lochak 1984, p. 2].
- ¹⁰ Per la traduzione italiana delle citazioni relative a questo articolo di Einstein ho seguito il testo pubblicato nella raccolta curata da Enrico Bellone [Einstein 1988].
- ¹¹ Nella formula, precisa Einstein, $k = R/N$ è la costante di Boltzmann e p_n un numero indipendente dalla temperatura T , caratteristico della molecola e del suo n -esimo stato quantico, che può essere chiamato il 'peso' statistico di questo stato.
- ¹² Nel limite ipotizzato gli esponenziali tendono a 1 e A_{mn} diviene trascurabile rispetto a ρB_{mn} .
- ¹³ Per questo argomento si veda [Pais 1991], sezione 21d: "Le prime difficoltà con il caso".
- ¹⁴ Sembra che il primo ad usare la parola "laser" sia stato Gordon Gould, un allievo di Townes. I primi dispositivi di questo tipo furono in realtà i MASER (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) costruiti da Townes e Shawlow nel 1954 utilizzando un gas di ammoniaca e radiazione nella zona di frequenza delle microonde. La tecnologia era molto simile a quella del laser, ma non utilizzava luce visibile. Il primo laser ottico a rubino fu costruito da Theodore Maiman nel 1960. Molti storici affermano che il primo a costruire un laser ottico fu invece Gould, il quale cercò di brevettarlo fin dal 1958, senza successo. Di conseguenza, la sua tecnologia fu sfruttata da altri.
- ¹⁵ Il "Cheshire Cat", un gatto immaginario presente nella cultura popolare anglosassone, è uno dei più sorprendenti personaggi di *Alice nel paese delle meraviglie* di Lewis Carroll. È caratterizzato dalla sua capacità di apparire e scomparire a suo piacimento, a volte lasciando dietro di sé soltanto il suo enigmatico sorriso.
- ¹⁶ Un sistema vibrante possiede un insieme di modi normali (e di frequenze corrispondenti) che dipendono dalla sua struttura e composizione. Nel corso del moto di oscillazione secondo uno dei modi normali, tutte le parti del sistema vibrano di moto armonico e con la stessa frequenza. Nel caso semplice di una corda perfettamente elastica e fissata ai suoi estremi (un sistema fisico che descrive bene le corde degli strumenti musicali nel regime armonico) i suoi modi normali sono caratterizzati da un numero intero che ne determina la *frequenza propria*, fissate le sue dimensioni e il materiale da cui è composta. Tale numero corrisponde al numero dei *ventri* che la corda forma nella sua oscillazione e determina automaticamente il numero dei *nodi*, che comprendono sempre i due nodi agli estremi, che sono fissi per qualunque modo di oscillazione. In generale un sistema fisico oscilla secondo una combinazione dei suoi modi normali (principio di sovrapposizione).

¹⁷ I quanti di luce venivano distribuiti in celle dello spazio delle fasi di grandezza h^3 . Un microstato veniva definito tramite il numero delle celle contenenti un numero determinato di quanti di frequenza determinata. I microstati corrispondevano dunque ai numeri di occupazione delle celle. La statistica di Bose per i fotoni coincideva quindi con la statistica precedentemente applicata da Planck ai quanti di energia e forniva perciò la formula d'irraggiamento di Planck.

¹⁸ Lo stesso Einstein, che voleva derivare la formula di Planck per una via diversa da quella elettrodinamica, nel 1907 l'aveva ricavata utilizzando la formula di Wien e il principio di corrispondenza.

¹⁹ Per una trattazione della teoria BKS nell'ambito del dibattito tra Bohr e Einstein si veda [Pais 1991, cap. 22].

²⁰ Di fatto l'esperienza di Compton non certificava la conservazione dell'energia nel processo di *scattering* elettrone-radiazione. I raggi X venivano individuati *dopo* la collisione con un elettrone, e questi raggi erano dotati di una energia corrispondente al valore calcolato *in accordo con l'ipotesi che i raggi X si comportassero come particelle dotate di impulso ed energia ben definiti*. Compton non individuava l'elettrone, così che non risultava possibile sapere se quest'ultimo acquistava l'intera energia perduta dal raggio X, e non una parte di volta in volta variabile di questa.

²¹ N. Bohr a H.A. Kramers, 27 luglio 1925.

²² La statistica di Bose-Einstein determina la distribuzione statistica relativa agli stati energetici dei bosoni, all'equilibrio termico, nell'ipotesi di particelle identiche e indistinguibili tra loro. La maniera caratteristica del modo di contare gli stati alla Bose è tale che una permutazione di n bosoni identici non genera un nuovo stato, così che un numero illimitato di particelle potrebbe occupare lo stesso stato energetico allo stesso tempo. La statistica di Fermi-Dirac si applica ai fermioni, particelle che rispettano il principio di esclusione di Pauli, ovvero non possono occupare lo stesso stato quantico di un altro fermione.

²³ Inizialmente, tuttavia, Heisenberg non aveva ben chiara la differenza tra i due tipi di statistica, infatti aveva connesso le funzioni antisimmetriche con la statistica di Bose.

²⁴ Fermi aveva derivato questo tipo di statistica con una trattazione che era passata un po' inosservata.

²⁵ W. Heisenberg a W. Pauli, 23 Ottobre 1926 (*Wolfgang Pauli, scientific correspondence*, a cura di A. Hermann, K. Von Meyenn, e V. Wiesskopf, Vol. 1, p. 251, Springer 1979).

²⁶ Per approfondimenti relativi a questa trattazione si rimanda soprattutto al classico [Mandl e Shaw 2001, Cap. 1], a [Dirac 1990, Cap. 6], e a [Bernardini 2005].

²⁷ L'operatore "1" lascia invariato l'ente a cui è applicato, così non lo metto più in circolazione quando viene fuori dai conti successivi, per semplificare.

²⁸ Si richiama brevemente che in meccanica quantistica, ad ogni grandezza osservabile di un sistema fisico si associa un operatore autoaggiunto e lineare A dello spazio di Hilbert i cui vettori (normalizzati) rappresentano gli stati nei quali il sistema si può trovare. Un operatore lineare assegnato è definito da una matrice A in una base fissata. In generale, questa matrice, applicata a un generico vettore x lo trasformerà in un altro vettore $y = Ax$. Tuttavia, possono esistere degli speciali vettori x aventi la proprietà $Ax = \lambda x$ per particolari valori di λ (equazione agli autovalori), ovvero caratterizzati dalla proprietà che il vettore trasformato è parallelo a quello di partenza. Ciascuno di questi speciali vettori (*autovettore*), soluzioni dell'equazione secolare, rappresenta un *autostato* della grandezza osservabile e il corrispondente numero λ viene chiamato *autovalore*. Il problema agli autovalori permette quindi di trovare quei valori del parametro per cui l'equazione ammette una soluzione finita e a un sol valore per tutto il dominio delle variabili. Gli elementi diagonali di A ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$) costituiscono quindi gli autovalori, mentre gli autovettori x_k associati sono appunto soluzioni dei problemi $Ax_k = \lambda_k x_k$. A ciascun autovalore possono corrispondere uno o più autostati, corrispondenti a un particolare stato fisico nel quale, se si riuscisse ad effettuare una misura della grandezza A , si troverebbe come risultato l'autovalore relativo a quell'autostato. L'insieme degli autovalori forma lo *spettro* dell'operatore; tale spettro, che rappresenta tutti i possibili valori che l'osservabile A può assumere, può essere discreto, continuo o in parte discreto e in parte continuo.

²⁹ Si veda la nota precedente.

³⁰ La *gauge* per i potenziali viene scelta in modo che $\nabla \cdot A = 0$ (*gauge di Coulomb*). In questo caso, soltanto due delle componenti del potenziale vettore A sono indipendenti e corrispondono ai due diversi stati di polarizzazione. Questa condizione definisce quindi il cosiddetto campo trasversale, perché per un'onda $A(x, t) = A_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ accade che $k \cdot A = 0$. Cioè A risulta perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

³¹ Dalla seconda assunzione discende che debbano valere le relazioni di indeterminazione. Se si misurano contemporaneamente grandezze coniugate come la posizione e l'impulso, accade che $\Delta x \Delta p \geq h$, la quale implica che non è possibile misurare simultaneamente tali grandezze con precisione arbitraria. Lo stesso vale per una operazione di misura simultanea dei campi E e H .

³² Per un esame del contributo di Jordan alla nascita della teoria quantistica dei campi si veda [Ehlers 2007].

³³ Infatti, come riconosciuto da Einstein, ed enfatizzato nell'articolo di Ehrenfest [Ehrenfest 1925], sebbene il metodo di Debye conducesse alla formula di Planck, forniva un risultato errato per le fluttuazioni della radiazione di cavità in un elemento di volume. Invece dell'atteso risultato a due termini (dualità onda-corpuscolo della luce) determinava soltanto il contributo ondulatorio.

³⁴ Ricordiamo che, introducendo gli operatori di creazione e distruzione che agiscono nel modo seguente:

$a_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle$, $a_k^+ |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle$, n_k viene così interpretato come il numero di particelle che si trovano nello stato quantico k e quindi, dalle proprietà degli operatori a , scaturisce immediatamente la possibilità di "variare" il numero di particelle in uno stato.

³⁵ L'espressione "seconda quantizzazione" coniata successivamente da Jordan (cfr. [Darrigol 1986, p. 226]), implica l'applicazione in successione di due livelli di regole formali di quantizzazione.

³⁶ Su questi temi si veda il capitolo 15 di *Inward Bound*, in particolare la sezione dal titolo significativo "The end of the game of marbles" [Pais 1983, p. 324].

³⁷ Già nel 1923, discutendo l'effetto fotoelettrico, Bothe aveva elaborato una spiegazione per risolvere l'enigma della natura della radiazione: "L'elettrodinamica classica deve essere rielaborata soltanto per quanto riguarda l'Ansatz per la densità di energia, nel senso che il campo d'onda contiene soltanto una frazione infinitamente piccola dell'energia totale emessa e agisce essenzialmente come un "campo pilota" [Führungsfeld] essendo la maggior parte concentrata nei quanti di luce" [Bothe 1923]. Nel 1926 riesprime il concetto di campo "pilota" come segue: "Sebbene esista un campo d'onda che si propaga secondo le leggi classiche, l'energia non è tuttavia distribuita con continuità come richiede l'elettrodinamica classica, ma è concentrata in quanti di luce; la funzione del campo d'onda consiste nel guidare i quanti di luce in modo tale da fornire in media la distribuzione seguita dall'energia classica" [Bothe 1926]. L'idea ritornerà più tardi con De Broglie e le "onde pilota" .

³⁸ Si vedano [Dirac 1977] e [Dirac 1983] per un resoconto personale sul periodo.

³⁹ Fino a tempi relativamente recenti il contributo fondamentale di Jordan, anche riguardo la nascita della meccanica quantistica, è stato spesso sottovalutato. In particolare la comunità dei fisici, ha generalmente attribuito al solo Dirac un ruolo pionieristico in questo senso. Si veda tuttavia [Schweber 1994, p. 5] che definisce Pascual Jordan come "the unsung hero among the creators of quantum mechanics" e come colui che pose le basi della teoria quantistica dei campi. Per un inquadramento storico si veda [Darrigol 1986] e per un esame più generale dell'opera di Jordan si veda [Ehlers 2007].

⁴⁰ Infatti, osserva Dirac, se ν_r è la frequenza della componente r , E_r può cambiare solo per multipli interi del quanto $h\nu_r$, e notava come ipotesi simili fossero state usate da Born e Jordan [Born e Jordan 1925] per trasferire la formula classica della emissione di radiazione di un dipolo nella teoria quantistica e da Born, Heisenberg e Jordan [Born Heisenberg Jordan 1925] per calcolare le fluttuazioni dell'energia in un campo di radiazione di corpo nero.

⁴¹ Dalle due equazioni precedenti segue che gli a_r e i loro coniugati a_r^* soddisfano le equazioni

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_r = \sum_s V_{rs} a_s, \quad i\hbar \frac{d}{dt} a_r^* = \sum_s a_s^* V_{rs} \quad \text{dove } V_{rs} \text{ sono gli elementi della matrice che rappresenta il termine relativo alla perturbazione. Se si considerano } a_r \text{ e } a_r^* i\hbar / 2\pi \text{ come variabili canoniche coniugate, le equazioni precedenti assumono la forma hamiltoniana}$$

$$\frac{da_r}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \quad i\hbar \frac{da_r^*}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial a_r}, \quad \text{con hamiltoniana } F_1 = \sum_{r,s} a_r^* V_{rs} a_s .$$

⁴² Subito dopo Dirac considera il caso generale di un numero arbitrario di sistemi *partendo dalla supposizione* che seguano la statistica di Bose-Einstein e osserva che in questo caso "si debbono prendere in considerazione solo le autofunzioni simmetriche" nelle variabili $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, che caratterizzano l'insieme e che etichettino ciascuna lo stato stazionario in cui si trovano i singoli sistemi. Queste autofunzioni simmetriche rispetto a tutti i sistemi sono "sufficienti per fornire la soluzione quantistica del problema". Passando attraverso una serie di cambiamenti di variabili, Dirac ritrova come risultato che l'equazione di Schrödinger per l'insieme che segue la statistica di Bose-Einstein, caratterizzata da un gruppo di variabili che rappresentano ciascuno stato stazionario, è della forma vista qui sopra, dimostrando quindi che "l'equazione per l'hamiltoniana F effettivamente "descrive gli effetti di una perturbazione su un insieme che segue la statistica di Einstein-Bose".

⁴³ Per una discussione critica sulle procedure di quantizzazione si veda [Bergia 2005].

⁴⁴ Un riferimento di base è [Dirac 1971], *I principi della meccanica quantistica*, in particolare il § 60, "La connessione fra oscillatori e bosoni" contenuto all'interno del capitolo 10 "Teoria della radiazione".

⁴⁵ Conviene sottolineare come la complementarità tra i due aspetti risulti evidente dalla relazione di commutazione tra gli operatori θ_i e N_i , rispettivamente operatore di fase e operatore numero di fotoni. Se si conosce la "proprietà corpuscolare" di uno stato, qui il numero dei fotoni, resta completamente indeterminata la fase, una proprietà ondulatoria. E viceversa.

⁴⁶ Sulla nascita della teoria dei campi si vedano [Schweber, Miller, Wentzel, Jost, Darrigol, Mehra, Bergia].

⁴⁷ Per una sintesi del lavoro di Dirac, dalla meccanica quantistica alla teoria dell'elettrone si veda [Moyer 1981].

⁴⁸ Per una rassegna dei principi generali su cui si basa la teoria quantistica dei campi e sulle sue implicazioni nell'arco del Novecento si veda [Wilczek 1999]. Una interessante panoramica, che riassume concetti e risultati della teoria dei campi, si trova anche in [Peierls *et al.* 1955].