

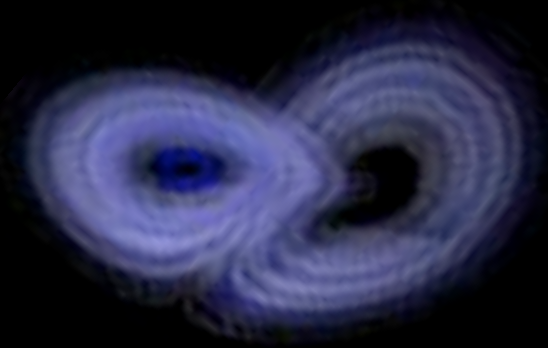
Associazione per l'Insegnamento della Fisica
Scuola di Storia della Fisica
Ferrara, 30 novembre - 5 dicembre 2009

Il moto dei pianeti, ordine o caos? Il problema dei tre corpi una sfida per la meccanica celeste

Luisa Bonolis

*There are more things in heaven and earth, Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy*

W. Shakespeare, *Hamlet* (Atto I, Scena V)



*On sera frappé de la complexité de cette
figure, que je ne cherche même pas à
tracer. Rien n'est plus propre à nous
donner une idée de la complication du
problème des trois corps et en général
de tous problèmes de Dynamique où il
n'ya pas d'intégrale uniforme...*
Henri Poincaré

luisa.bonolis@roma1.infn.it



In ogni semestre Arnold Sommerfeld dedicava una lezione speciale di due ore a un argomento delle sue ricerche che non aveva ancora compreso a fondo.

Quando, una volta, gli fu chiesto come potesse insegnare un argomento che non capiva, egli rispose:



Se sapessi qualcosa su questo argomento, non ne farei una lezione!



Osservazioni introduttive

La possibilità di predire il futuro si fonda sul concetto di determinismo: il futuro è determinato in maniera *univoca* dallo stato presente

Le leggi della dinamica classica, come l'equazione di Newton $F = ma$ sono delle "regole" rappresentate matematicamente da equazioni differenziali, la cui soluzione, una volta assegnate le condizioni iniziali, determina univocamente il futuro. Le leggi sembrano, in quanto tali, intrinsecamente deterministiche.

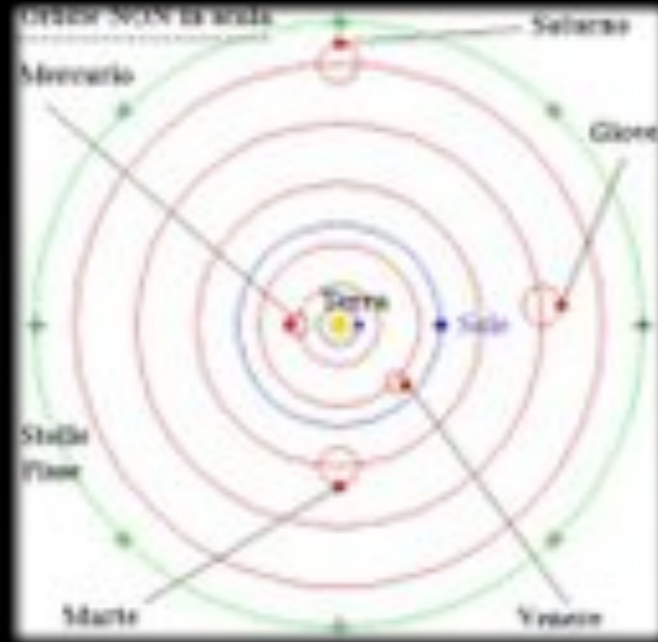
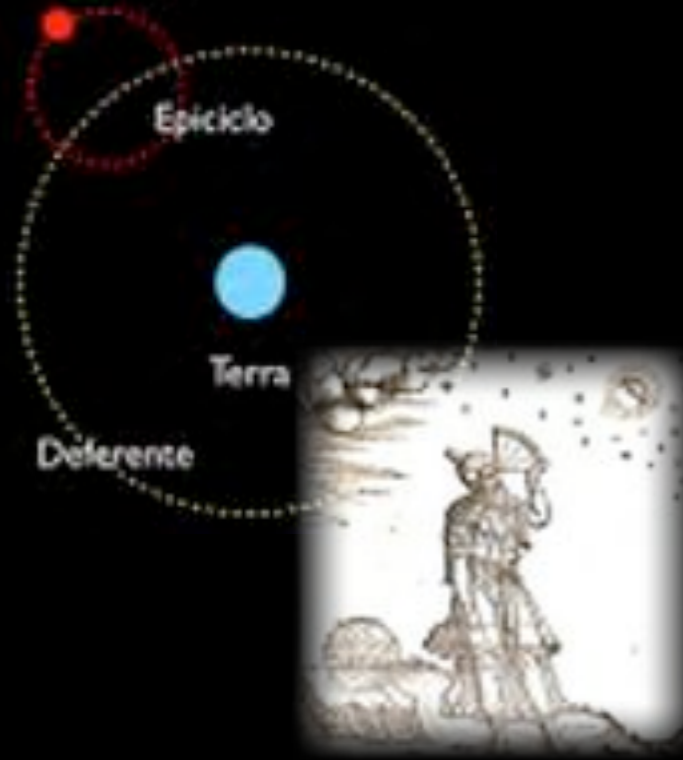
Affermare che il futuro di un sistema è determinato in modo univoco dal suo stato presente, *non significa* però che siamo effettivamente in grado di determinarlo. Infatti le equazioni della dinamica possono non avere soluzioni esplicite compatte.

Variazioni piccole nei parametri di un sistema non portano, necessariamente, a variazioni piccole nella evoluzione futura. Leggi semplici non portano necessariamente a comportamenti semplici

L'evoluzione di un sistema fisico, biologico, chimico, economico, sociale ecc. può essere descritta da leggi semplici, ma non necessariamente *lineari* (caso in cui le soluzioni non divergono nel tempo)

La *non linearità* può essere una tipica caratteristica alla radice del comportamento caotico di sistemi apparentemente deterministici

Moti regolari



La concezione antica del moto come sempre scomponibile in moti circolari uniformi, nata dalle osservazioni astronomiche, raggiunse il suo massimo sviluppo nell'*Almagesto* di Tolomeo.

Le irregolarità dei moti vengono riprodotte mediante gli **epicicli**, orbite circolari su cui il pianeta si muove di moto uniforme. Il centro dell'epiciclo si muove di moto uniforme sul **deferente**.

MOTI QUASI PERIODICI

Un moto è scomponibile in N moti circolari uniformi se ogni coordinata che lo descrive, o più in generale, ogni grandezza osservabile A , osservata al variare del tempo t , può essere scritta nella forma $A(t) = f_A(\omega_1 t, \dots, \omega_N t)$, dove $f_A(\phi_1, \dots, \phi_N)$ è una funzione periodica con periodo 2π di N angoli; le quantità $T_i = 2\pi / \omega_i$ sono gli N periodi del moto e i loro inversi sono le frequenze ν_i .

Si possono quindi immaginare N cerchi tali che lo stato del sistema sia determinato all'istante t dalla posizione su questi cerchi di N punti che ruotano con velocità angolari rispettive $\omega_1, \dots, \omega_N$.

L'intero Sistema Solare allora noto, più le stelle fisse, poté essere rappresentato da Tolomeo per mezzo di 43 moti circolari uniformi (*deferenti ed epicicli*).

Poiché una funzione multiperiodica f_A è determinata dal suo sviluppo di Fourier, si può dire che l'astronomia greca consistè nella determinazione empirica, dei coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche che, tramite l'espressione $A(t) = f_A(\omega_1 t, \dots, \omega_N t)$ descrivono il moto degli astri.

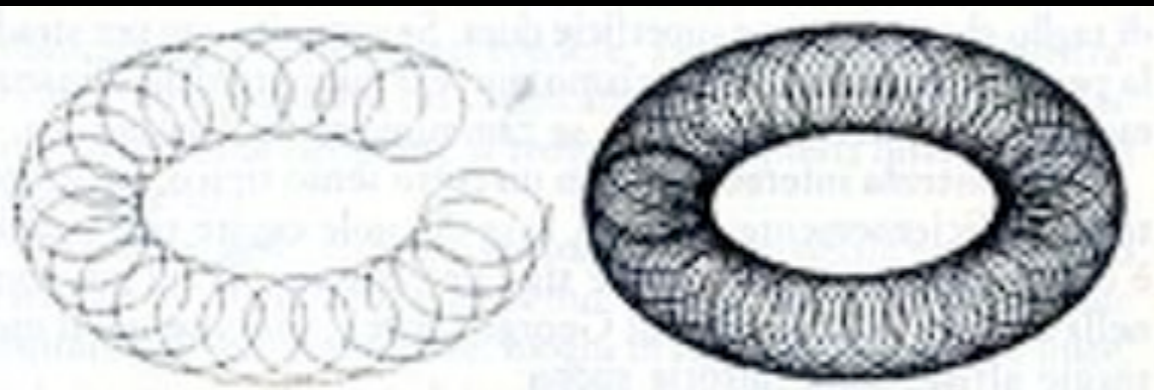
La legge di gravitazione universale permise di determinare a priori, sulla base di pochi dati iniziali, le funzioni f_A e di limitare a priori il numero delle frequenze indipendenti in relazione al numero dei gradi di libertà. Si possedeva quindi un algoritmo per calcolare le funzioni f_A , cioè si aveva una teoria a priori del *Sistema del Mondo*, come dimostrò Pierre-Simone de Laplace nel suo trattato di meccanica celeste

Il “manifesto” del determinismo



Un'intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza [...] Tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità tendono ad avvicinarlo continuamente all'intelligenza che abbiamo immaginato, ma da cui resterà sempre infinitamente lontano.

Pierre-Simone de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1776



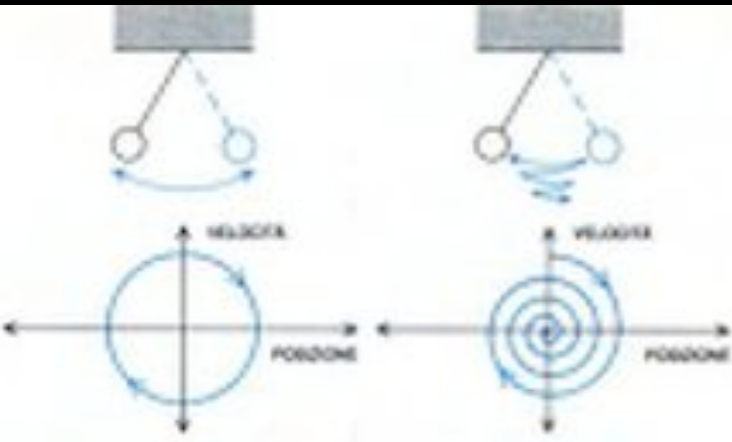
Nel *moto quasi periodico* si combinano insieme vari moti periodici diversi, con frequenze indipendenti. Attorno a un toro ci sono due direzioni, una per il foro centrale, l'altra, perpendicolare a questa, corre lungo l'equatore. Se si combinano due moti periodici entrambi multipli interi di una medesima quantità, ne risulterà un altro modo periodico. Se il rapporto dei periodi è irrazionale i due periodi non hanno alcuna misura comune e la loro combinazione non si ripete mai. Essa “si ripete quasi” per multipli comuni approssimati del periodo.

La fisica newtoniana forniva la possibilità di una teoria dei moti dei sistemi meccanici di natura non astronomica. La teoria dei moti dei sistemi più semplici, come oscillatori unidimensionali (pendoli), oscillatori armonici (corde vibranti), giroscopi ecc. consentì di concepirli come moti risultanti di moti circolari uniformi.

Fino a oltre la metà del Novecento la pratica abituale è stata quella di ridurre i problemi a problemi di *moti quasi periodici*, con la conseguente ricerca dei *modi normali* e delle *armoniche fondamentali*.

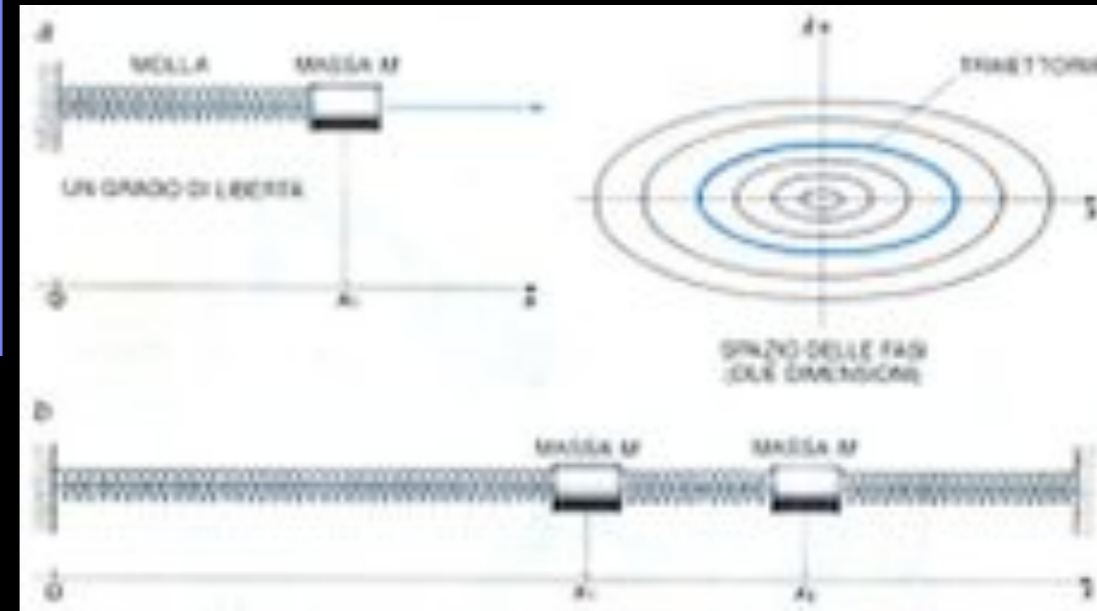
La meccanica celeste pullula di cicli sovrapposti...

Problemi integrabili



Spazio delle fasi: due dimensioni per ogni grado di libertà, una posizione e il momento canonico coniugato. Le quantità conservate sono ipersuperfici su cui il moto del sistema è obbligato.

Spazio delle fasi per un pendolo semplice, senza attrito e con attrito. L'orbita, il cammino nello spazio delle fasi, è rispettivamente una curva chiusa o una spirale che tende verso un punto



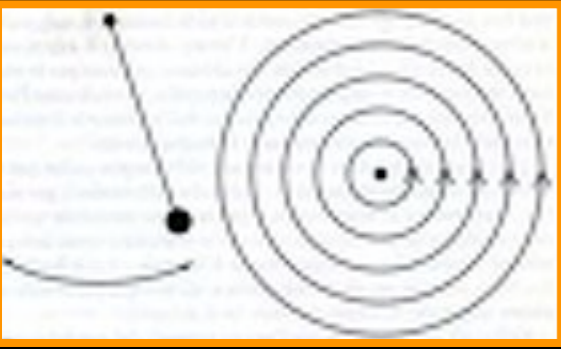
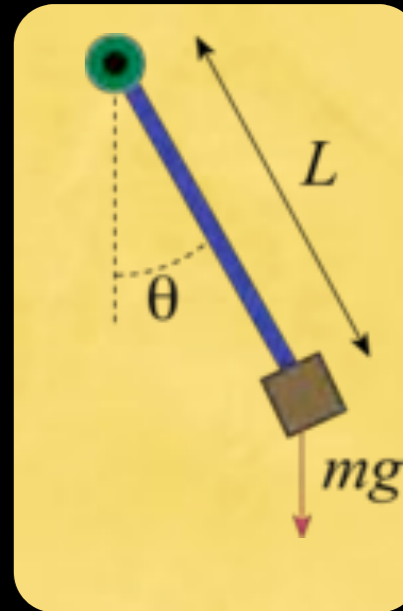
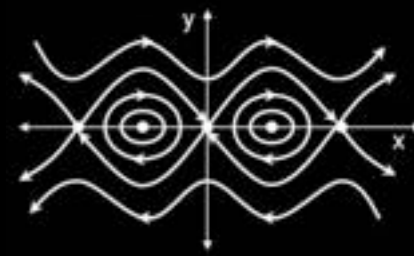
Nel caso di una massa collegata ad una molla, lo spazio delle fasi del sistema ha due dimensioni. Le traiettorie sono ellissi che dipendono dalle condizioni iniziali.

Nel caso di due solidi collegati da molle, lo spazio delle fasi ha quattro dimensioni. Per mezzo del cambiamento di coordinate $X = x_1 + x_2$ e $Y = x_1 - x_2$ si ottengono equazioni identiche a quella del caso precedente: le soluzioni sono quelle di due oscillatori indipendenti (modi caratteristici del sistema) e le traiettorie si inscrivono su tori a due dimensioni dello spazio delle fasi a quattro dimensioni.

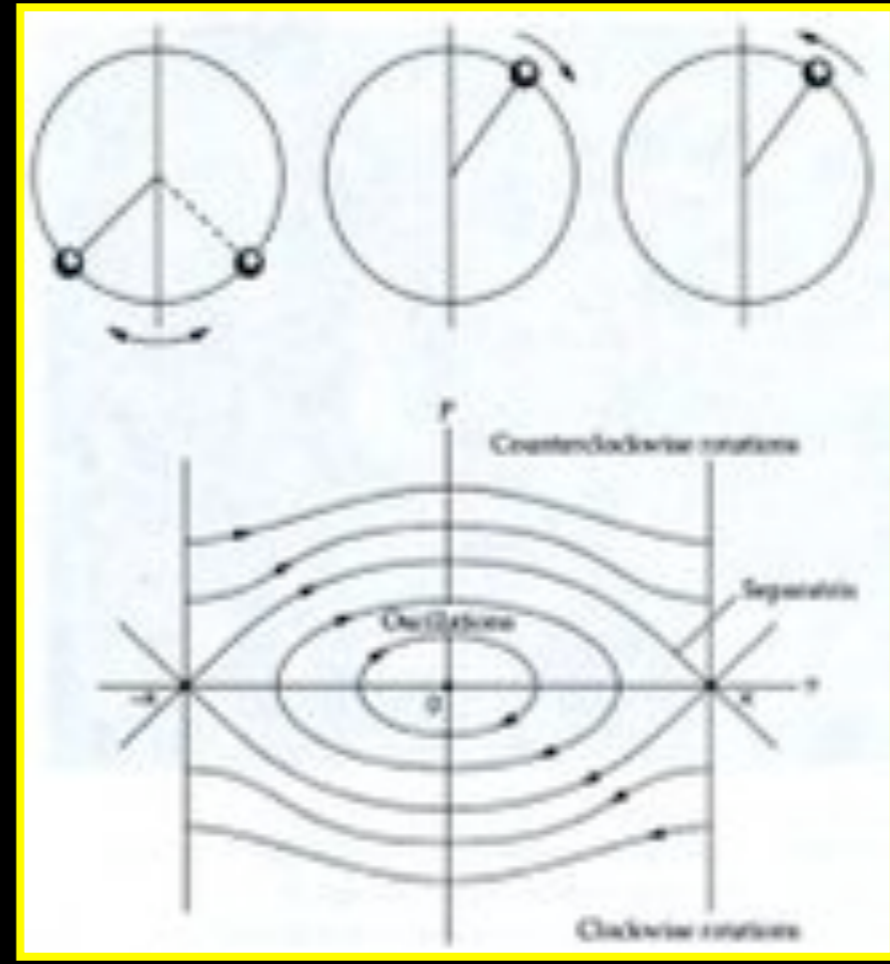
In generale, la traiettoria del punto che rappresenta il sistema a N gradi di libertà nello spazio delle fasi è determinata per successive integrazioni **dalle** equazioni del moto, che formano un sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine che collegano le $2N$ coordinate (posizioni e momenti) del punto rappresentativo del sistema nello spazio delle fasi (in cui sono compresi i diversi accoppiamenti tra i gradi di libertà), ma anche **dal** punto di partenza della traiettoria, ossia dalle condizioni iniziali del sistema. La difficoltà della soluzione deriva dagli accoppiamenti tra le diverse equazioni (moti non necessariamente separabili)

In generale, un sistema a N gradi di libertà è integrabile se lo si può scomporre in N sistemi indipendenti a un grado di libertà. **La cosa è sempre possibile quando il sistema è lineare, e quindi tutti i sistemi lineari sono integrabili.**

Lo spazio delle fasi



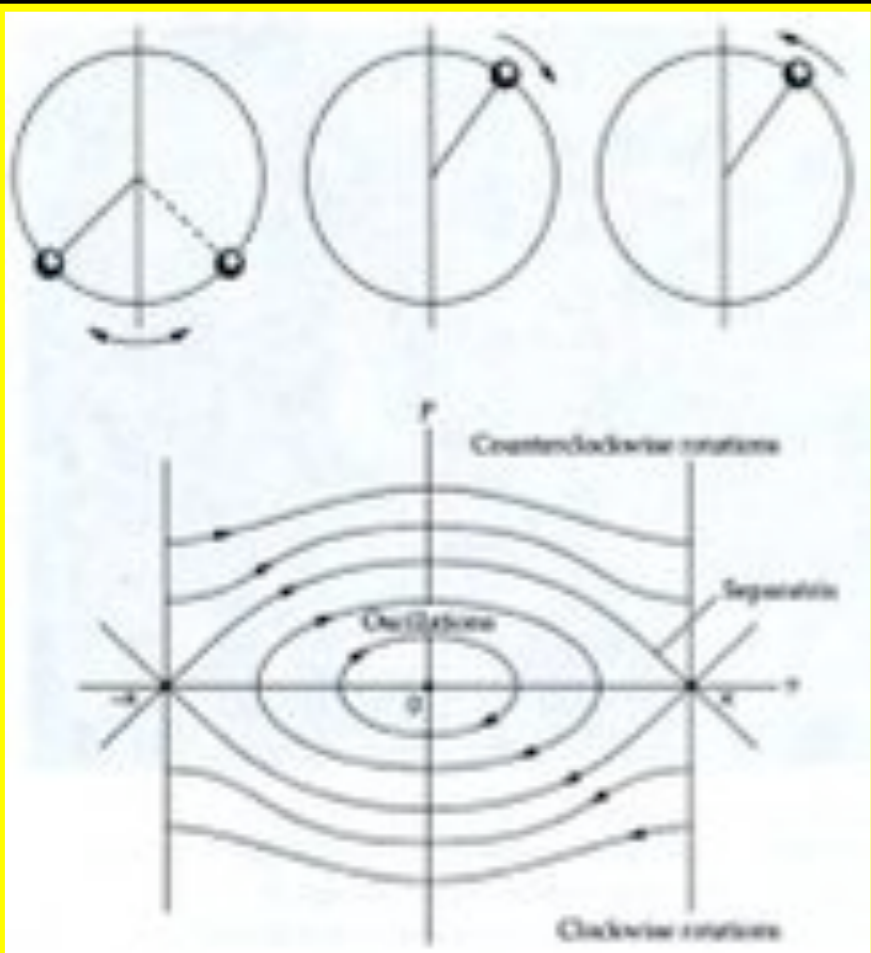
Moto armonico semplice: forza motrice proporzionale allo spostamento. La famiglia di curve copre l'intero piano e corrisponde a condizioni iniziali diverse



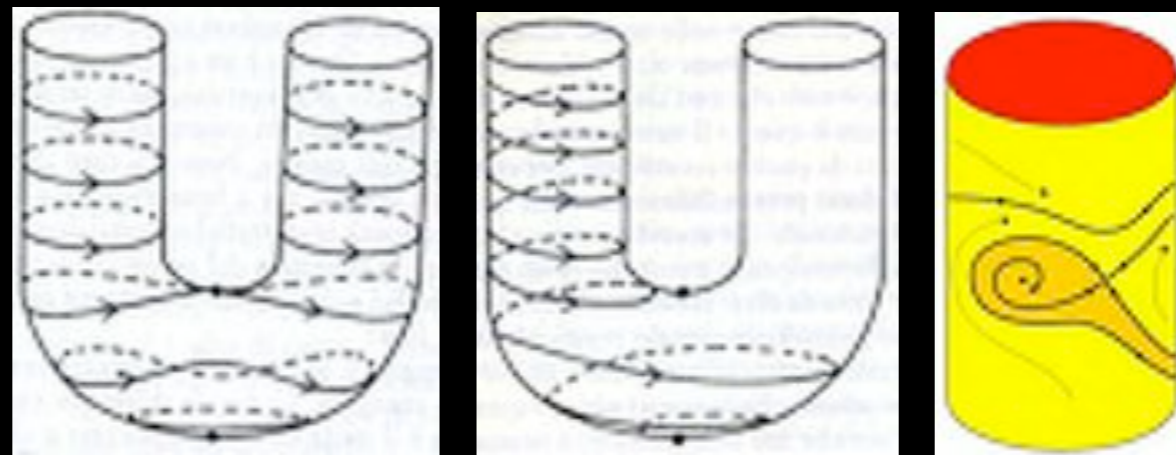
Pendolo reale, grandi oscillazioni e rotazioni. Le soluzioni sono funzioni ellittiche, matematica complicata. Ma la somma di energia cinetica più potenziale rimane la stessa durante tutto il movimento (assenza di attrito) L'energia si conserva. Disegnando $v=f(\theta)$ si ottengono le corrispondenti curve.

Figure nello spazio delle fasi come rappresentazione geometrica delle traiettorie di un sistema dinamico. Ciascun insieme di condizioni iniziali corrisponde a una curva. Queste figure possono rivelare informazioni sull'esistenza di attrattori o "repulsori" o cicli limite per la corrispondente scelta dei parametri iniziali. Lo stato di un pendolo ideale è unicamente definito dall'angolo e dalla velocità angolare. Così che lo spazio degli stati è rappresentato dall'insieme di tutte le possibili coppie (angolo, velocità angolare) che formano il cilindro. Il numero di gradi di libertà del sistema dinamico (il numero delle variabili necessarie alla sua descrizione completa) definisce la dimensione del suo spazio delle fasi.

Lo spazio delle fasi



Livelli di energia



La “pupilla” dell’occhio è il moto di energia minima, che corrisponde al pendolo immobile in posizione verticale, è il più basso livello di energia possibile del sistema. All’aumentare dell’energia si ottengono gli ovali chiusi, corrispondenti alle oscillazioni normali del pendolo (*tic tac*), stati periodici.

Il contorno dell’occhio rappresenta la **separatrice**, la traiettoria che divide le oscillazioni dal moto circolare. È la traiettoria che il pendolo seguirebbe se fosse tenuto verticalmente verso l’alto e poi liberato. È uno stato instabile, come uno spillo in equilibrio sulla punta. Il minimo disturbo può mettere in moto il pendolo che inizialmente si muove con lentezza infinita, acquista velocità, passa per il punto più basso e risale sempre più lentamente verso la cima.

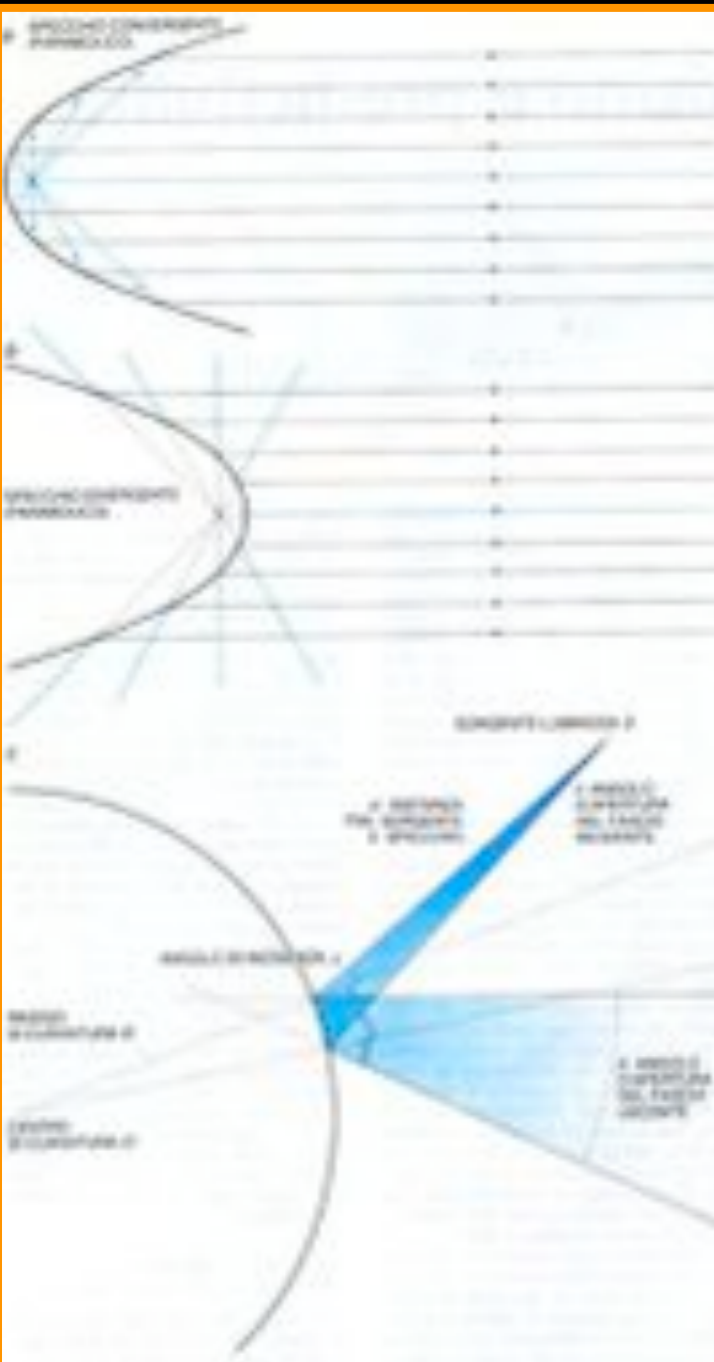
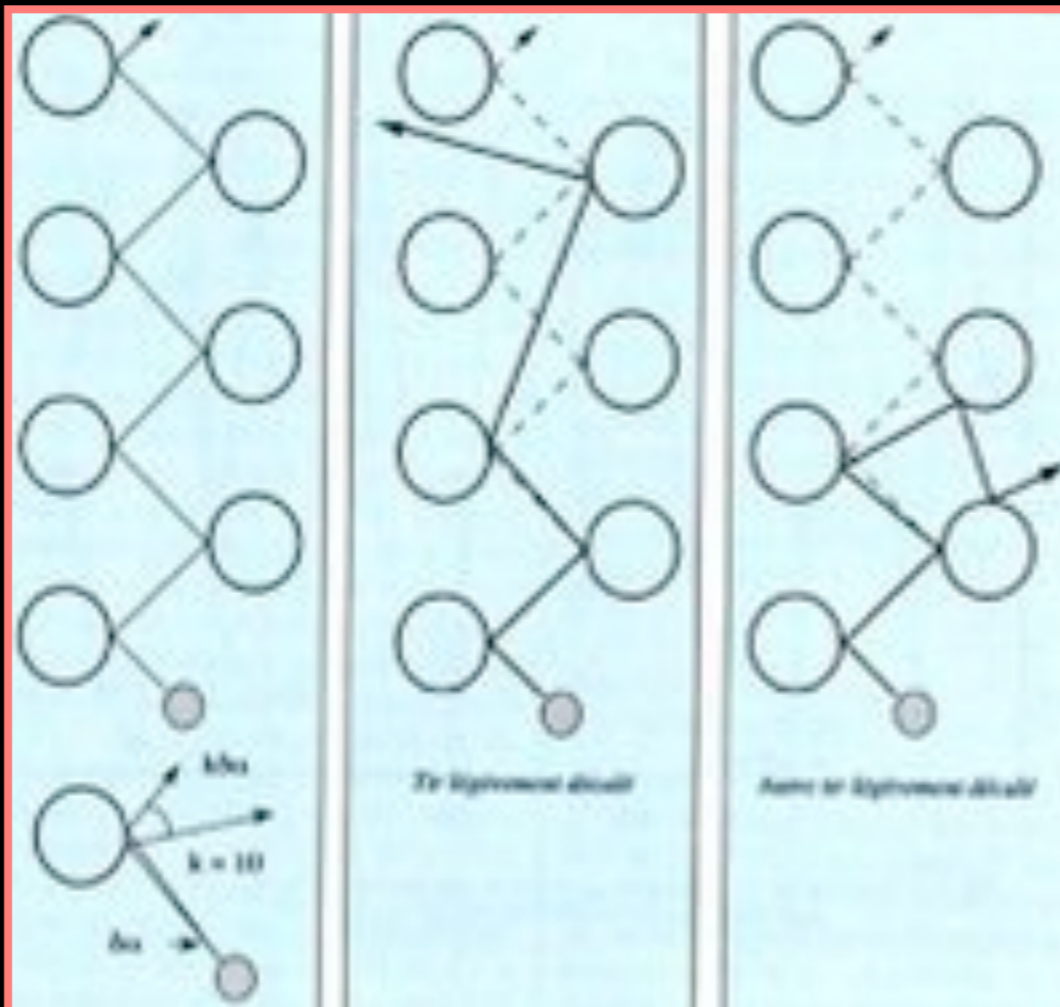
Quando il pendolo si muove come un’elica di aereo, il moto circolare può essere in due direzioni diverse corrispondenti alle curve in alto e in basso, che si trovano oltre la **separatrice**. Due tipi distinti di moto periodico

Le leggi della dinamica classica, come l'equazione di Newton $F = ma$ sono delle "regole" rappresentate matematicamente da equazioni differenziali, la cui soluzione, una volta assegnate le condizioni iniziali, determina univocamente il futuro. Le leggi sembrano, in quanto tali, intrinsecamente deterministiche

Telescopi e biliardi

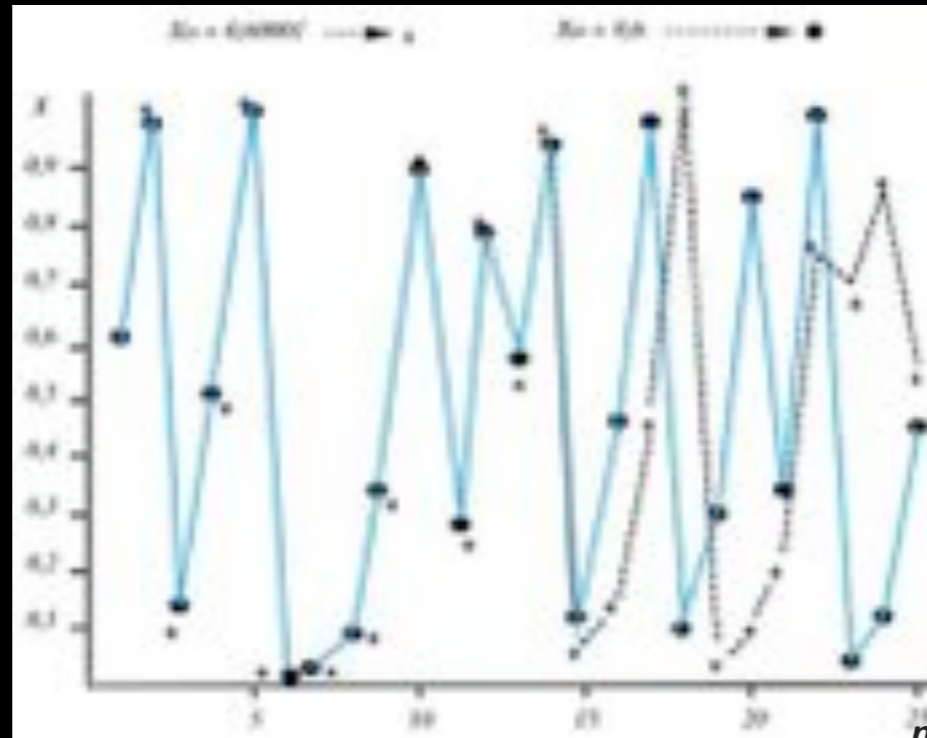
Disponendo più specchi convessi in modo che il fascio luminoso subisca diverse riflessioni successive, il fascio si allargherà molto rapidamente

Dagli specchi ai biliardi: leggi analoghe valgono per una diversa classe di sistemi. Gli urti della palla contro le sponde del biliardo corrispondono a riflessioni su specchi piani. Disponendo di due biliardi identici e lanciando simultaneamente una palla su ciascuno dei due, a partire dalla stessa posizione, con la stessa velocità iniziale, ma in direzione leggermente diversa, le due traiettorie divergeranno rapidamente. Dopo appena 20 secondi (1 urto al secondo, in media) i due moti non avranno più niente in comune.



Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

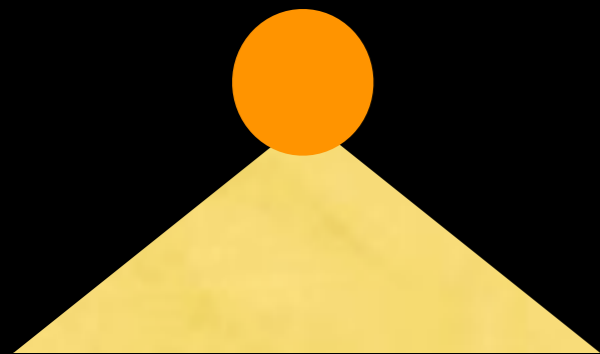
Amplificazione esponenziale delle piccole differenze nel punto di contatto, che si compone ad ogni collisione, come accade per le generazioni successive dei batteri quando spazio e cibo siano illimitati



Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considerable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard... il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux: une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers, la prédiction devient impossible...

Henri Poincaré

Bonolis AIF 2009



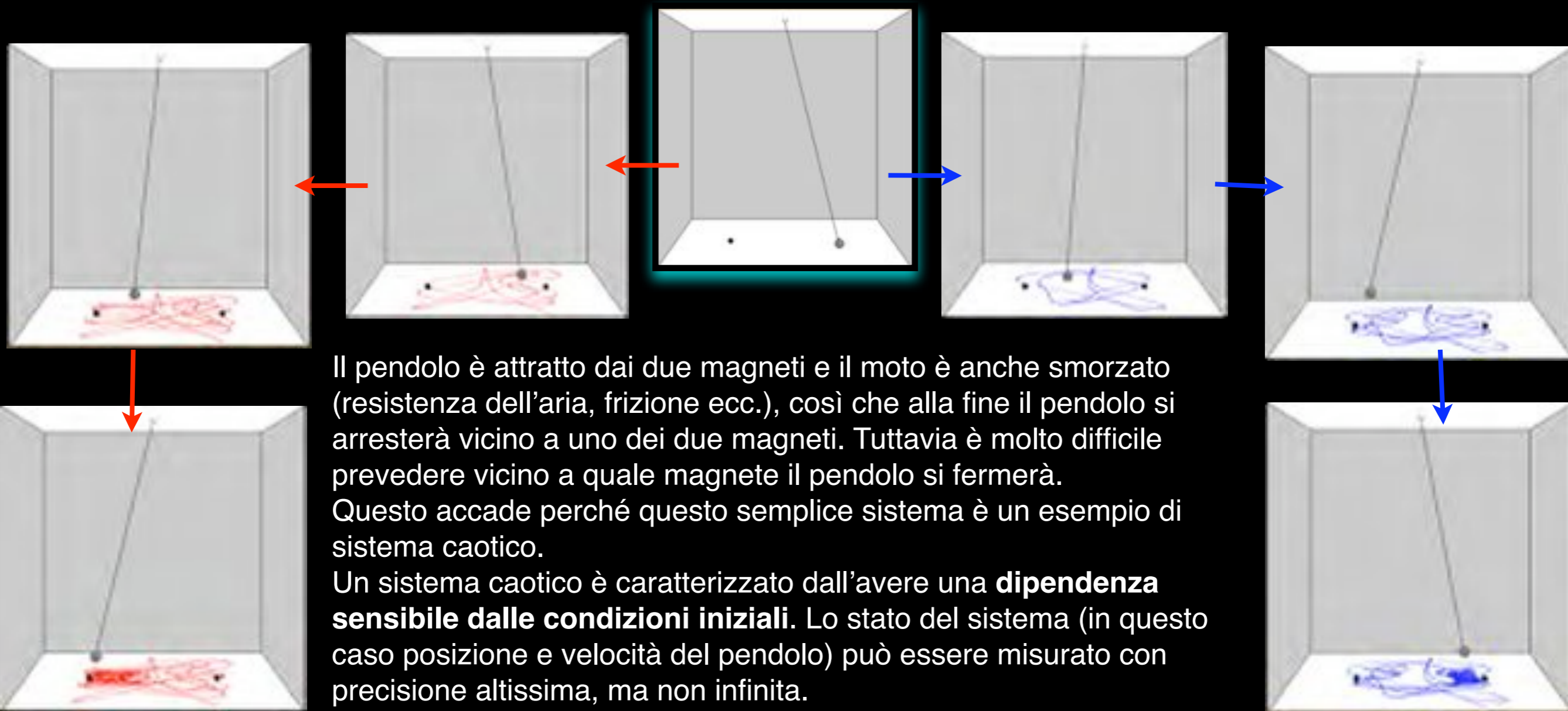
Un piccolo cambiamento dei dati iniziali modifica in modo considerevole l'evoluzione successiva del sistema. Una palla collocata sulla cima di una montagna può rotolare verso una qualsiasi delle diverse valli sottostanti.

Il modello di crescita delle popolazioni animali è descritto da una ben nota e molto semplice equazione che lega X_{n+1} , la popolazione nell'anno $n+1$, a X_n , la popolazione dell'anno precedente n :

$$X_{n+1} = K X_n (1 - X_n)$$

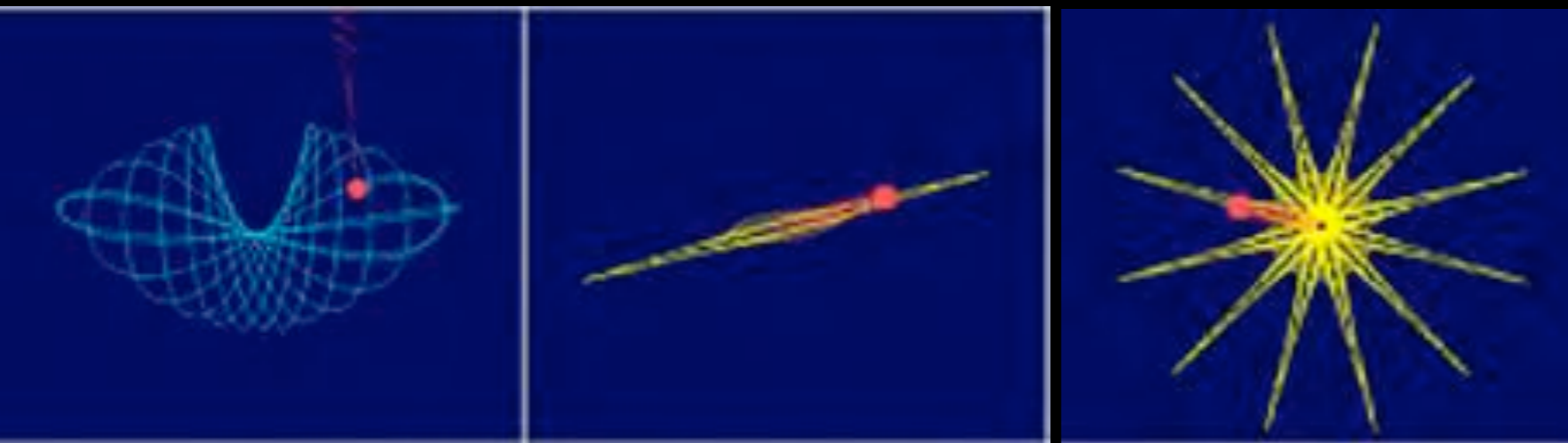
La figura mostra l'evoluzione su 25 anni calcolata a partire da una popolazione iniziale $X_0 = 0.6$ per un fissato K . Se si calcola l'evoluzione sullo stesso periodo introducendo uno scarto di 10^{-5} sulla popolazione iniziale ($X_0 = 0.60001$) si ottiene la curva tratteggiata.

Pendolo e due magneti esempio di sistema caotico



Questo significa che qualsiasi descrizione del sistema sarà caratterizzata da piccoli errori, eventualmente molto piccoli, se la misurazione è molto accurata. Se la dinamica è tale che gli effetti di questi errori di misurazione crescono esponenzialmente, ogni previsione diventerà impossibile. Questo implica che i sistemi caotici sono impossibili da prevedere su tempi sufficientemente lunghi anche se le condizioni iniziali sono state misurate con grande precisione e le regole che governano il sistema sono perfettamente conosciute.

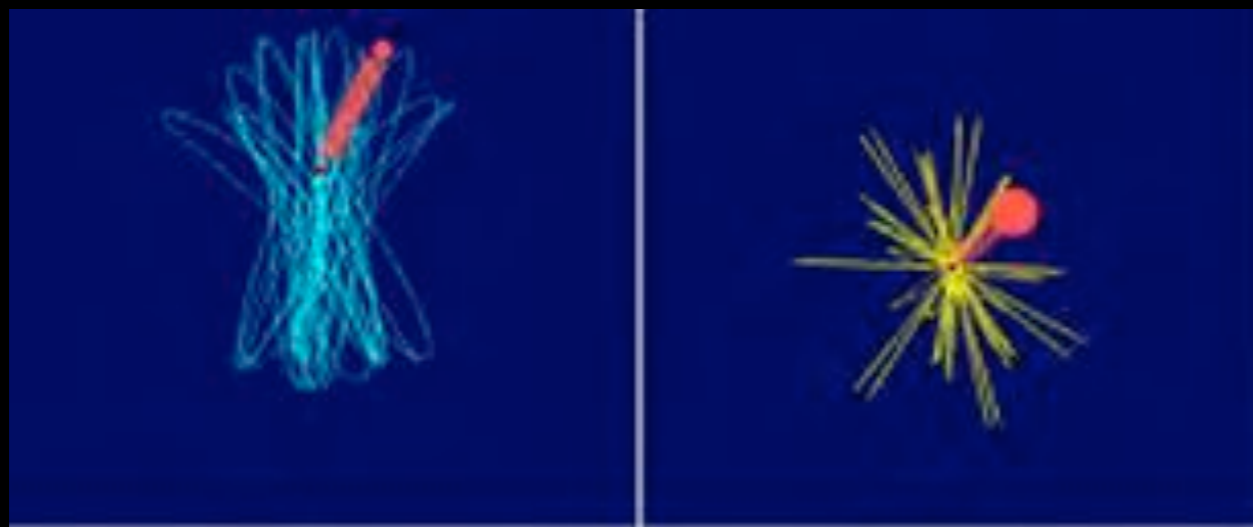
Il pendolo a molla



Sezione x-z

Sezione x-y

Moto a bassa energia, in cui il pendolo traccia un percorso regolare la cui proiezione nel piano x-y è una stella a dodici punte.

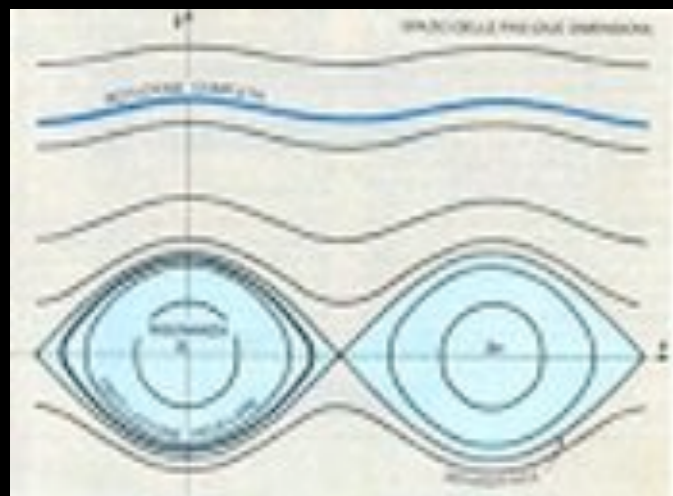
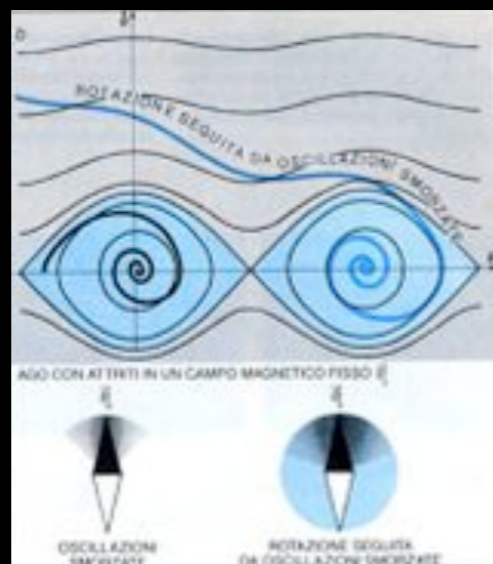
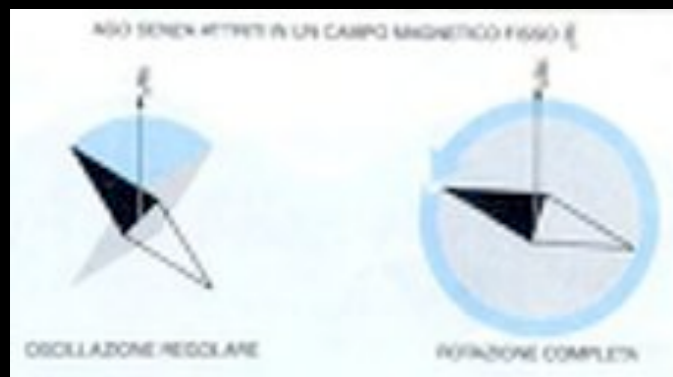


Moto caotico

Una soluzione per questo sistema dinamico a energia molto superiore. Il pendolo non traccia più un percorso regolare, ma segue una traiettoria caotica e non prevedibile. La sezione nel piano orizzontale ha un aspetto molto più irregolare.



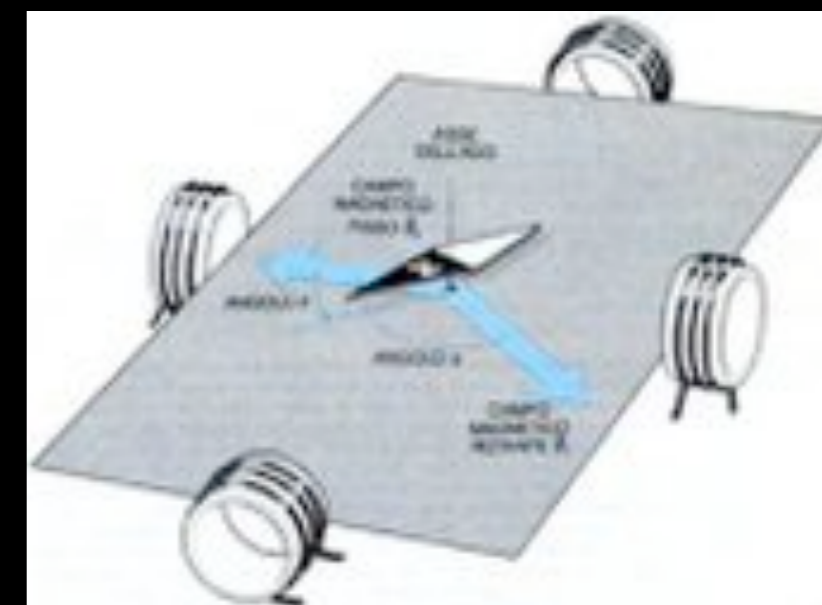
Sistema non lineare forzato



Qualsiasi punto nel piano delle fasi che si muova lungo un cammino chiuso è destinato a ripetere il suo moto periodicamente. Le traiettorie nello spazio delle fasi, tuttavia, non possono intersecarsi o ramificarsi.



Introduzione di un campo magnetico rotante



Le traiettorie dell'ago sono identiche a quelle del pendolo semplice. In entrambi i casi lo spazio delle fasi contiene traiettorie di due tipi: curve chiuse corrispondenti a oscillazioni dell'ago (o del pendolo) contenute in un dominio chiamato risonanza (in colore). Quando si fornisce all'ago energia sufficiente per effettuare rotazioni complete (verso orario o antiorario), le sue traiettorie nello spazio delle fasi sono curve aperte. Le separatrici corrispondono a moti dell'ago di energia appena sufficiente a permettergli di allinearsi nella direzione opposta a quella del campo magnetico fisso, una posizione di equilibrio instabile.

Sezioni di Poincaré

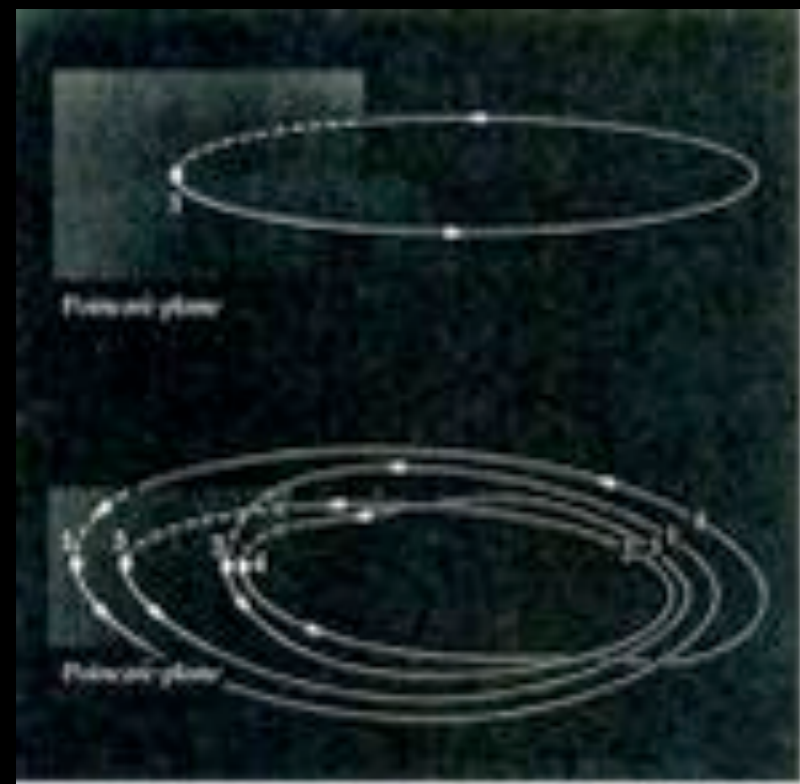
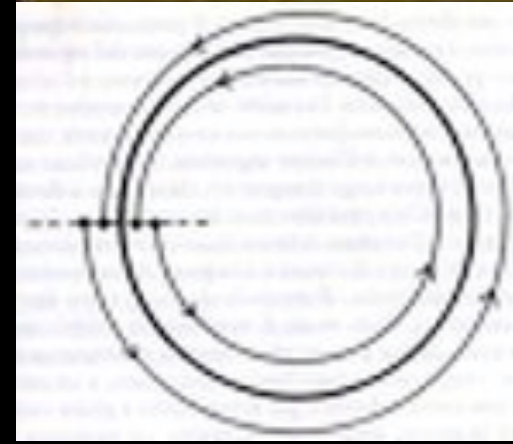
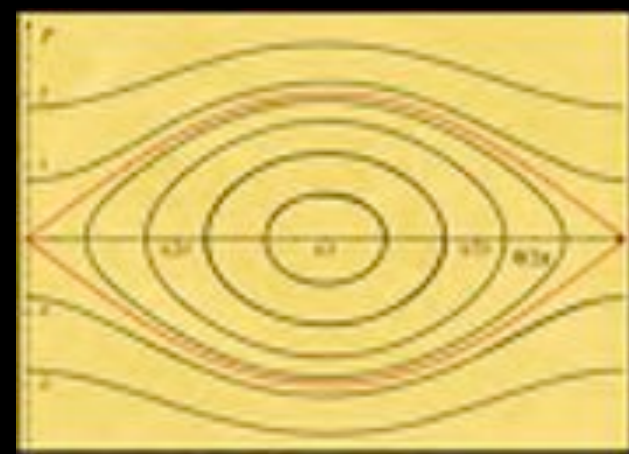
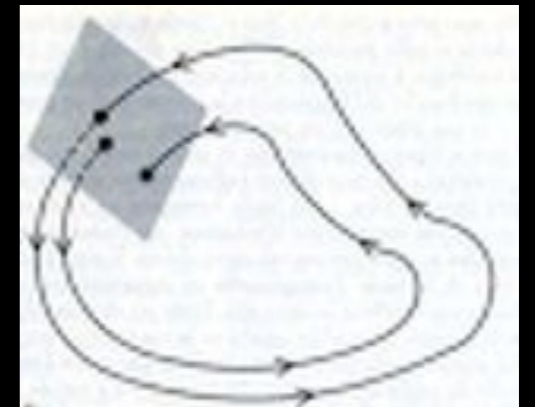
Per risolvere l'interrogativo: "Esiste una soluzione periodica per un sistema dinamico", anziché tentare di risolvere le equazioni ed esaminare il risultato, possiamo usare le sezioni di Poincaré

Tracciamo un segmento di retta che interseca il ciclo limite. Per ogni punto seguiamo la traiettoria dinamica: dopo un po' di tempo questa viene a incontrare di nuovo il segmento. Se il punto di partenza prescelto si trovava sul ciclo limite, la sua traiettoria lo riporterà esattamente al punto di partenza; in caso contrario la traiettoria intersecherà il segmento in un punto diverso, ma più vicino al ciclo limite rispetto a quello di partenza.

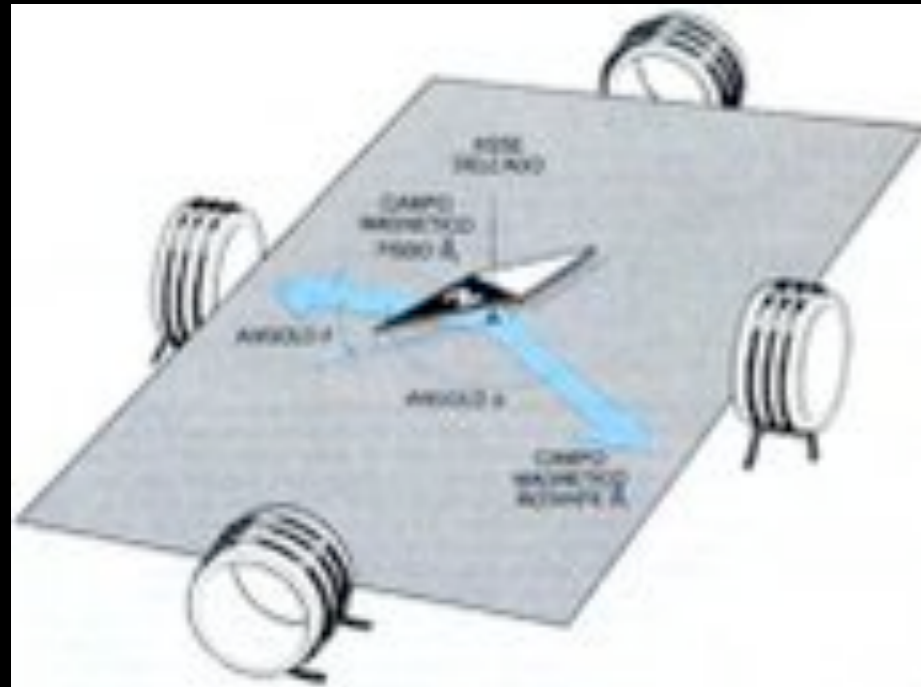
In tre dimensioni il segmento è diventata una porzione di superficie. Se il moto è periodico il piano sarà riattraversato nello stesso punto, con la stessa velocità e nella stessa direzione. se riusciamo a trovare uno stato che ritorni esattamente da dove è partito abbiamo trovato una soluzione periodica. Uno schema più complicato che mostra quattro punti di intersezione, indica un moto ciclico che alla fine si ripete dopo quattro passaggi

Mentre il sistema si evolve nel tempo, il punto si muove descrivendo una curva. Perché possa tornare a un qualche stato precedente, la curva deve chiudersi. L'esistenza di soluzioni periodiche dipende da proprietà topologiche del rapporto fra la posizione di un punto al presente e la sua posizione in un periodo successivo. Se un punto nello spazio delle fasi descrive una curva chiusa, ripeterà lo stesso moto periodico per sempre

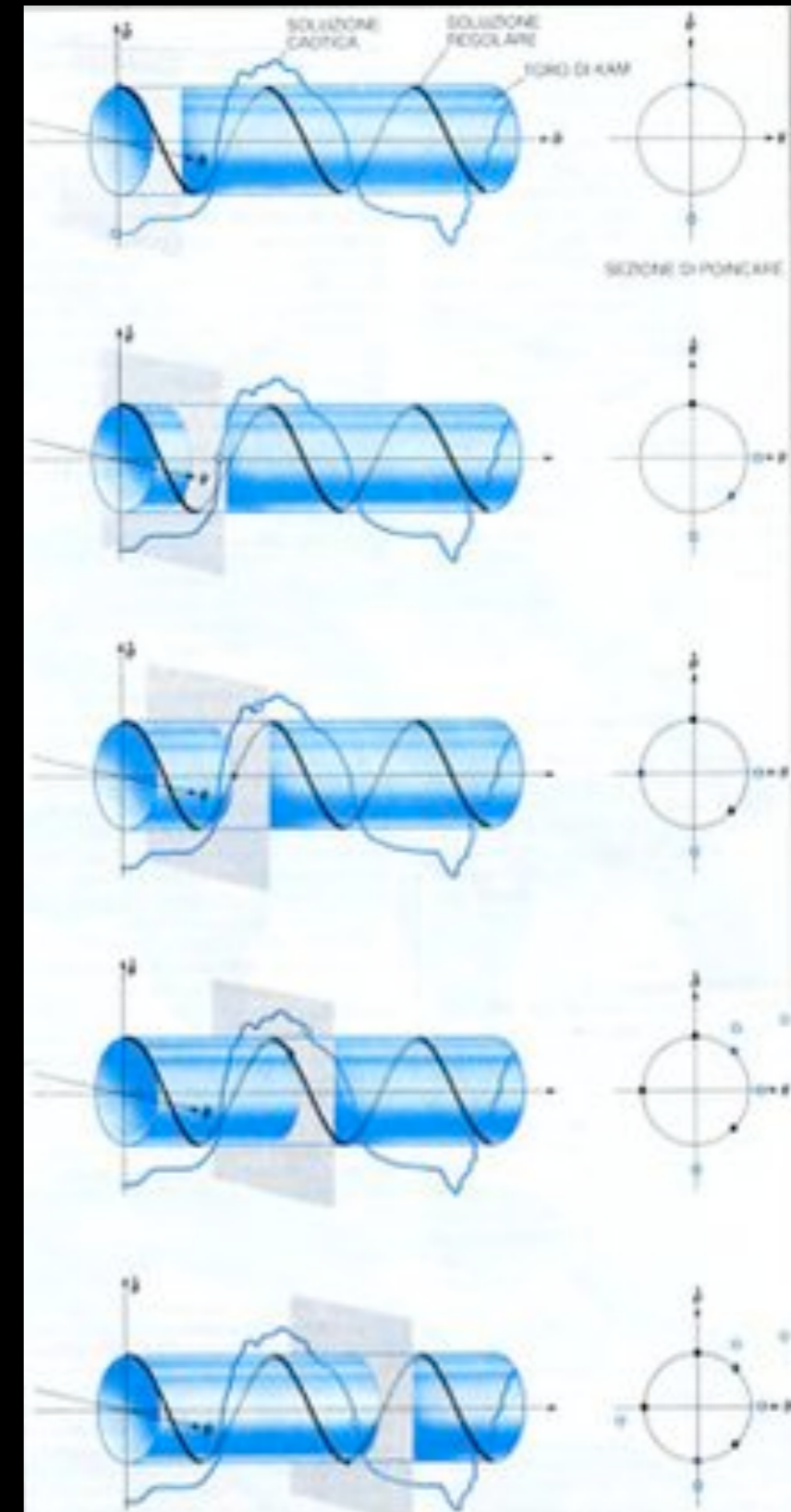
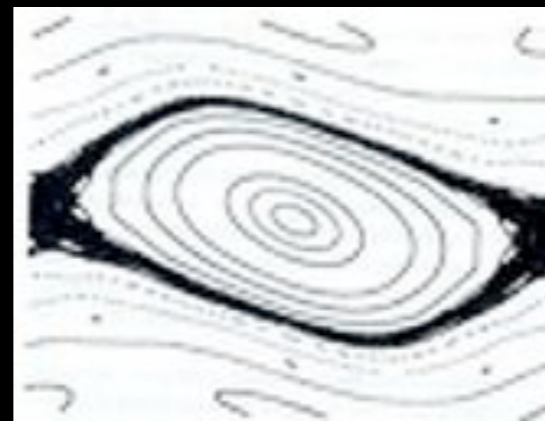
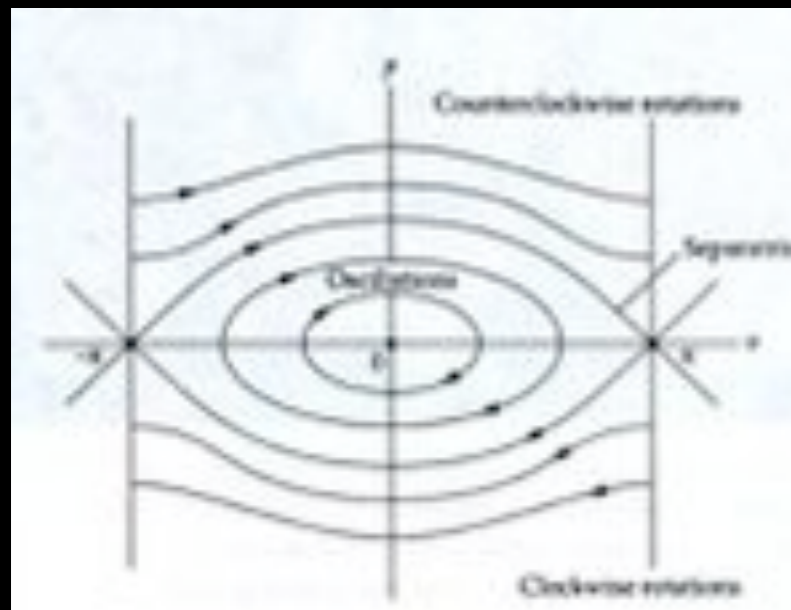
In due dimensioni, un sezione di Poincaré può essere molto complicata, come nel caso dell'attrattore di Ueda, in cui i punti si dispongono in vortici.



Sezioni di Poincaré e Comparsa della stocasticità

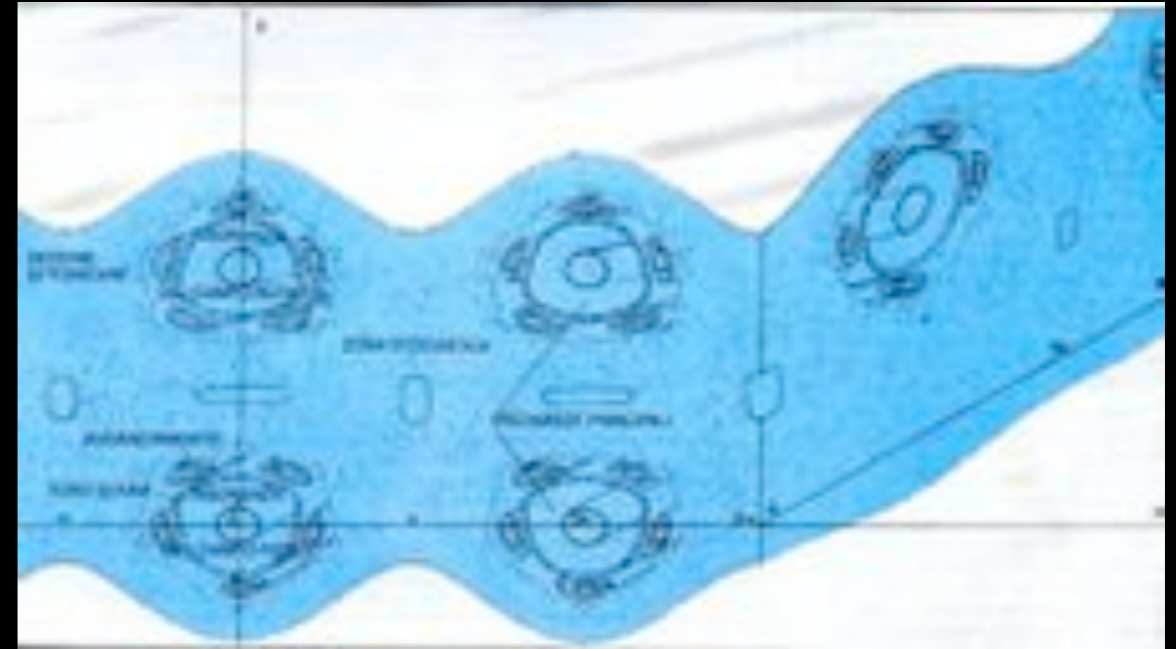
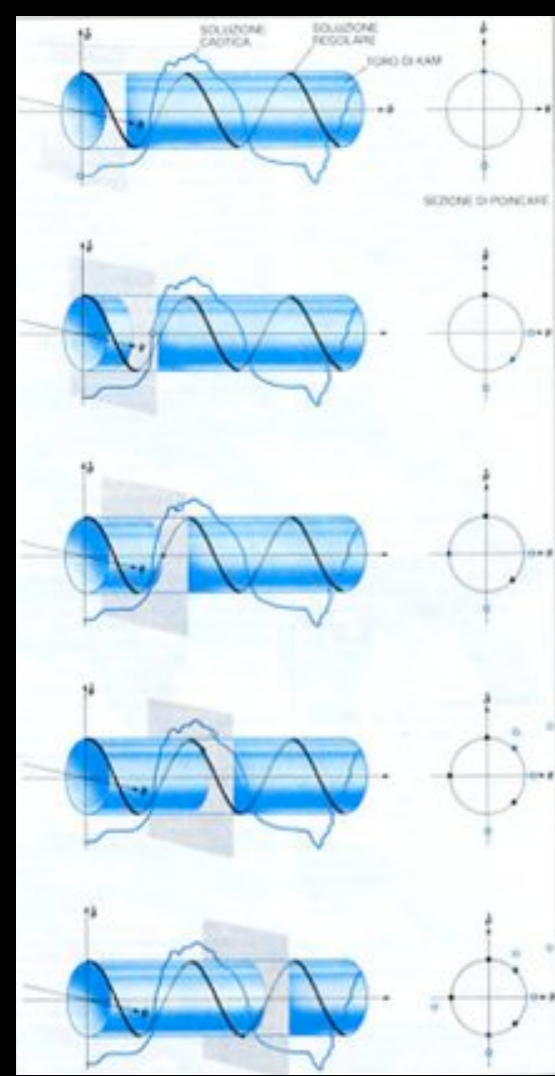


L'aggiunta di un "motore" al pendolo semplice altera la dinamica. Nello spazio delle fasi sono ancora visibili regioni interne che mostrano curve chiuse, che rappresentano l'oscillazione avanti e indietro, regioni esterne in cui il pendolo compie un moto circolatorio. Ma in prossimità della separatrice, il moto diventa caotico e imprevedibile. I punti non formano una curva, come accade nelle regioni ordinate, ma si dispongono apparentemente a caso in una regione abbastanza ampia

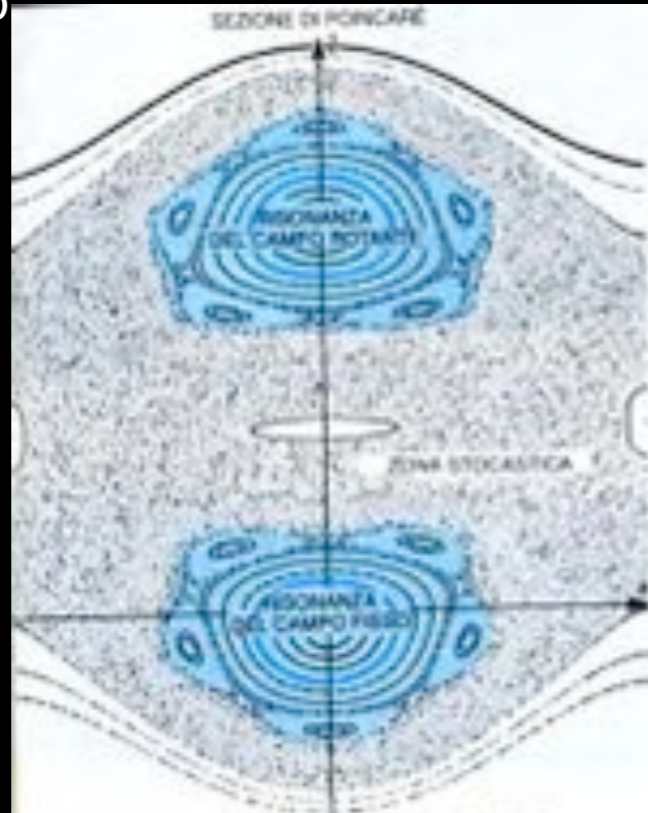


Per costruire le sezioni di Poincaré si portano sullo stesso piano (a destra) i punti che si trovano all'intersezione delle diverse traiettorie con piani di "taglio" spaziali di 2π lungo l'asse ϕ . Per le traiettorie regolari che si avvolgono a elica sui tori di KAM, ciascuna intersezione è un punto posto su una curva (in questo caso una circonferenza): la sovrapposizione dei piani di taglio costituisce la curva punto per punto.

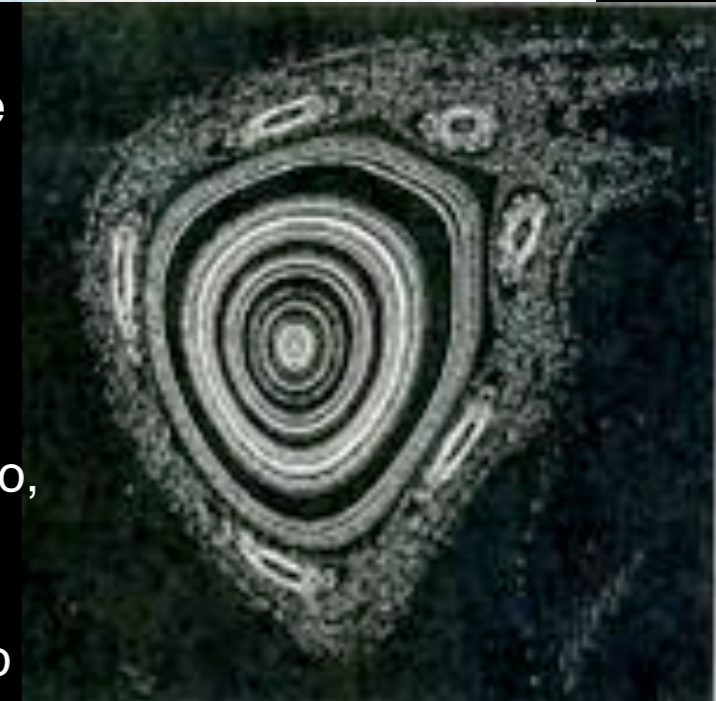
Tori di KAM e sezioni di Poincaré



In vicinanza di una traiettoria periodica tipica sopravvivono solo alcuni dei moti quasi periodici. Si notano traiettorie caotiche che si avvolgono fra isole di risonanza



In molti casi le traiettorie nello spazio delle fasi possono presentare tali convoluzioni che la risultante mappa di Poincaré mostra uno schema assai complesso, che presenta isole di regolarità in un mare di caos, che corrispondono ad orbite instabili che diffondono i punti in modo apparentemente casuale.



Strutture autosimilari: riproducono se stesse a qualunque livello di scala



L'età d'oro della meccanica celeste



Quando il calcolo infinitesimale si fu sviluppato a sufficienza perché si potesse cominciare a trarre le conseguenze della legge di Newton al di là del problema dei due corpi, i concetti e i metodi della matematica furono applicati per ottenere una rappresentazione dei moti dei corpi celesti nella forma di espressioni analitiche o numeriche, dipendenti dal tempo. Ino a Newon e alla legge di gravitazione universale, la descrizione dei moti degli astri era ancora di carattere puramente cinematico e non meccanico. La **meccanica celeste analitica** fu creata da Leonard Euler, Alexis Clairaut e Jean le Rond d'Alembert. Alla fine del XVIII secolo Joseph-Louis Lagrange e Laplace gettarono le basi di quei metodi della meccanica celeste, il cui termine e la cui definizione furono introdotti nel 1798 da Pierre-Simone de Laplace.

Numerosi matematici del XIX e XX secolo hanno poi lavorato agli aspetti teorici che si occupano essenzialmente del problema matematico, quello di risolvere le equazioni differenziali del moto dei corpi per effetto della forza di attrazione gravitazionale. Tra i più noti, Carl Gustav Jacobi, Carl Friedrich Gauss, Siméon-Denis Poisson, Henri Poincaré, George David Birkhoff, Tullio Levi-Civita, Aleksandr Michajlovič Ljapunov, J Moser Andrei Kolmogorov, V. Arnold, C.L. Siegel

Dalle due leggi di Newton si ricavano le equazioni di moto *degli N corpi*, che modellano il moto del Sole con $(N-1)$ pianeti in modo straordinariamente accurato.

Scrivere le equazioni del moto, non significa tuttavia saperle risolvere. Newton seppe risolvere soltanto le equazioni del problema dei 2 corpi, ovvero le equazioni del moto dei pianeti attorno al Sole quando si trascuri il fatto che i pianeti si attirano tra loro. In questo caso le orbite dei pianeti sono ellissi.

Nell'età d'oro della meccanica celeste, dai tempi di Newton fin quasi alla fine dell'Ottocento, le migliori menti matematiche si applicarono al problema dei 3 o più corpi. Alla fine dell'Ottocento la meccanica celeste arrivò a livelli addirittura maniacali di precisione, tanto che quando fu trovata un discrepanza di 8 secondi d'arco al secolo nel moto apparente di Mercurio, questo apparve come un problema terribile.

La spiegazione di questa anomalia inspiegabile nell'ambito incapacità della teoria Newtoniana fu il primo grande successo della rivoluzionaria teoria generale della relatività di Einstein.

Il problema dei tre corpi



Verso la fine del 1700 Lagrange considerò un caso particolare del problema dei tre corpi, in cui uno degli oggetti è abbastanza piccolo da non influenzare gli altri due oggetti di massa di gran lunga superiore.



Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si cela l'avvenire, per gettare uno sguardo sui progressi della nostra scienza e sui segreti del suo ulteriore sviluppo nei secoli futuri?

Tra i 23 problemi discussi da Hilbert nella sua relazione *Sur les problèmes futurs des mathématiques* al congresso di Parigi, c'era quello dei tre corpi, oggetto di studio da parte dei matematici fin dai tempi di Lagrange e suggerito dal movimento della Terra e della Luna rispetto al Sole.

Lagrange aveva introdotto speciali soluzioni periodiche la cui importanza si era rivelata nell'affrontare il problema della stabilità del moto dei pianeti. Se si immagina di spostare leggermente un pianeta dalla sua orbita, quale sarà il suo comportamento dopo un certo tempo? Oscillerà intorno alla sua orbita per poi riprenderla (orbita stabile) o se ne allontanerà definitivamente?

Dopo Lagrange, nuove soluzioni periodiche del problema dei tre corpi erano state trovate da George Hill (1838-1914) nelle sue ricerche sulla teoria della Luna.

Poiché la soluzione del problema dei 3 corpi tardava a venire, il re di Svezia, pare su suggerimento di Karl Weierstrass e Gösta Mittag-Leffler, mise in palio un ingente premio in denaro per chi vi si fosse applicato con successo, da consegnare il 2 gennaio 1889, in occasione del compleanno di Oskar II, re di Svezia e Norvegia.



Poincaré profeta del caos

*On sera frappé de la complexité
de cette figure, que je ne cherche
même pas à tracer.*

Nel 1889 il premio fu attribuito a Henri Poincaré per una memoria in cui dimostrava che il problema non aveva soluzione nel senso della definizione di soluzione proposta da Weierstrass: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Nel terzo capitolo affrontava il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche.

Il risultato di Poincaré non proibiva che si potesse calcolare un soluzione approssimata valida per un certo intervallo di tempo; proibiva però che si potesse calcolare con un errore arbitrariamente piccolo una soluzione valida per un tempo arbitrariamente grande e per tutte le condizioni iniziali vicine ad una certa data.

Ne *I metodi nuovi della meccanica celeste*, sfruttando i risultati ottenuti da Hadamard e Ljapunov, Poincaré mostrò inoltre che nei problemi del tipo di quello dei tre corpi dovevano presentarsi per forza delle orbite instabili (cioè tali per cui un piccolo cambiamento delle condizioni iniziali portava ad un cambiamento notevole dell'orbita) e che queste orbite instabili dovevano avere dei *punti omoclinici*. Il termine inventato da Poincaré vuol dire che vi sono delle orbite che col trascorrere del tempo si avvicinano sempre più all'orbita instabile ma anche che provengono da situazioni arbitrariamente vicine all'orbita instabile, come si scopre seguendole abbastanza a lungo nel passato (*omoclinico*, "che tende verso lo stesso").

Le orme del caos

Poincaré studiava il problema dei tre corpi idealizzato, chiamato *modello ridotto di Hill*. Una particella di polvere viene del tutto ignorata da due grossi corpi celesti che procedono tranquillamente nel loro moto attorno al centro di gravità comune. Applicando il suo metodo della superficie di sezione al modello ridotto di Hill, Poincaré cercava i moti periodici della particella di polvere.



Nello studio delle equazioni differenziali non lineari - cui generalmente portava tale tipo di questioni - Poincaré seguì un metodo completamente nuovo, gettando le basi della “analisi qualitativa delle equazioni differenziali”, cioè di una teoria *globale*. Infatti, non esistendo metodi generali per risolvere tali equazioni, nell’impossibilità già nel caso dei tre corpi di esprimere la soluzione per mezzo di funzioni in maniera esplicita, Poincaré partì con il “costruire le curve definite da equazioni differenziali” e si chiese: “Il punto mobile descrive una curva chiusa? E ancora: “Rimane sempre all’interno di una certa porzione di piano? In altre parole, usando il linguaggio dell’astronomia, ricerchiamo se l’orbita è stabile o instabile.”

La prosecuzione di questa analisi spinse Poincaré ad uno studio approfondito delle proprietà topologiche delle varietà m -dimensionali, da cui scaturì tutto il suo successivo lavoro sull’*analysis situs*. Riuscì a stabilire l’esistenza di soluzioni periodiche e ad applicare i suoi risultati al problema dei tre corpi nel caso in cui le masse di due di essi siano piccole, caso che approssima quello di due pianeti rispetto al Sole.

I risultati di Poincaré, benché molto famosi, non furono molto studiati dagli astronomi, in parte a causa della difficoltà relativa alla lettura della sua opera, in parte a causa del fatto che non si sapeva se i suoi risultati fossero rilevanti in pratica, per le scale di tempo che interessano agli astronomi, o solo una curiosità matematica...



Il commento di Hilbert

Il sig. Poincaré, riprendendo a trattare questo difficile problema [dei tre corpi] e avvicinandosi di più alla soluzione, ha scoperto metodi fecondi e di grande portata in meccanica celeste, che sono ogigiorno adottate e applicati anche dall'astronomia pratica. Il teorema di Fermat e il problema dei tre corpi occupavano, a parere di Hilbert, i poli opposti nell'insieme dei problemi: Il primo, libera creazione della pura ragione, il secondo, proposto dagli astronomi e indispensabile per la conoscenza dei fenomeni fondamentali più semplici della natura.

Il problema dei tre corpi era un esempio classico tra quelli posti ai matematici dall'astronomia, dalla fisica, dalla meccanica. Del resto, i primi e più antichi problemi di ogni branca della matematica, osservava Hilbert, traggono certamente la loro origine dall'esperienza e sono ispirati dal mondo dei fenomeni esterni... Ma nel progressivo sviluppo di una disciplina matematica lo spirito umano, incoraggiato dalla scoperta di soluzioni, prende coscienza della sua autonomia e crea lui stesso nuovi e fecondi problemi, nella maniera più libera, senza apparenti stimoli esterni e unicamente per combinazione logica, per generalizzazione e particolarizzazione, per separazione e riunione di idee... Sul potere creativo della pura ragione il mondo esterno esercita di nuovo la sua influenza e ci conduce attraverso fatti reali a nuove domande, ci apre nuove regioni della matematica.

Spesso, affrontando questi nuovi campi, si trovano le risposte ad antichi problemi irrisolti, a prima vista assai lontani e senza connessioni con le nuove ricerche. È su questi reiterati scambi tra ragione ed esperienza che riposano tante analogie sorprendenti, come quell'armonia apparentemente prestabilita, tante volte notata dai matematici, tra le questioni, i metodi e le concezioni dei diversi domini della loro scienza.

Nella continua interazione tra libere creazioni della mente e conoscenza dei fenomeni naturali Hilbert individuava la dinamica fondamentale che aveva caratterizzato lo sviluppo della matematica e insieme il processo di matematizzazione delle altre scienze.

Moti caotici generati con calcolatori elettronici

A partire dagli anni '50, alle orbite planetarie calcolate dagli instancabili meccanici celesti, come Leverrier, si cominciarono a sostituire orbite calcolate a macchina.

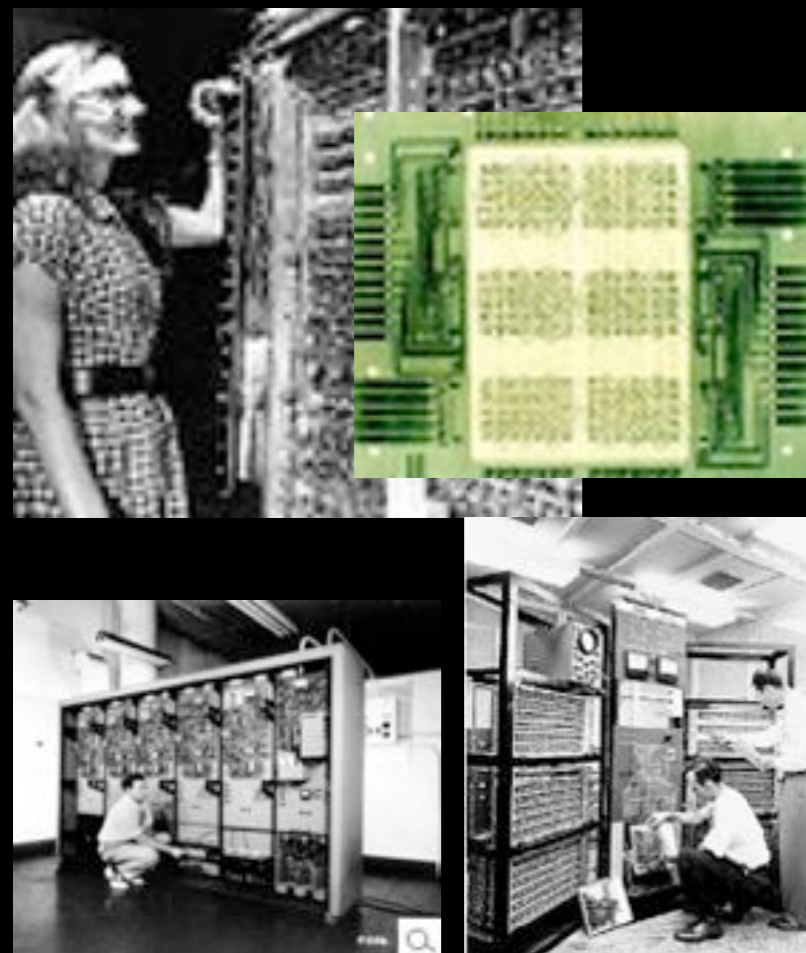
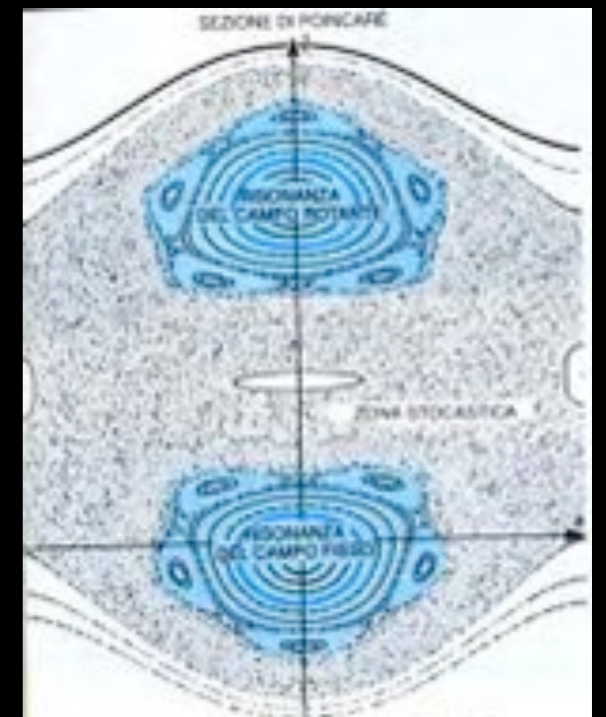
All'inizio sembrava solo una questione di velocità, giorno o anche solo ore, anziché anni di calcoli.

Poi qualcuno cominciò a usare i primi calcolatori anche per fare esperimenti tipo tracciare sequenze di punti che descrivevano il comportamento di una particolare soluzione di un problema dinamico per un tempo piuttosto lungo. Alcune delle curve invarianti, che si ottengono per ogni scelta delle condizioni iniziali, si dissolvono e lasciano il posto a moti caotici: i punti non formano più una curva, come accade nelle regioni ordinate, ma si dispongono apparentemente a caso in una regione abbastanza ampia, seguendo il filo della figura che lasciava allibito Poincaré.

Nel 1954 il russo Andrei Nicholaevich Kolmogorov annunciò un teorema che dimostrava in alcuni casi l'effettiva esistenza delle curve su cui i punti sembrano disporsi come negli esperimenti al calcolatore.

Si tratta effettivamente di una proprietà reale delle soluzioni le cui condizioni iniziali giacciono in una di queste regioni ordinate. La ragione profonda di ciò è che il moto può essere descritto mediante un insieme infinito di termini multiperiodici.

Nel 1963 il teorema fu esteso da Vladimir I. Arnold fino a comprendere il problema degli N corpi



Caos nelle previsioni meteorologiche

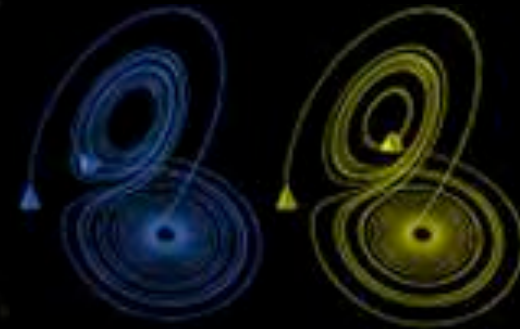
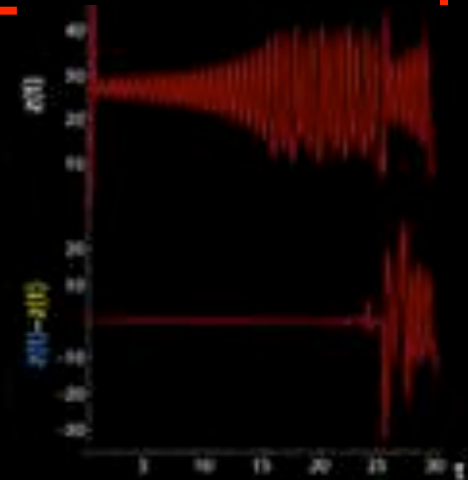
La possibilità di predire il futuro si fonda sul concetto di determinismo: il futuro è determinato in maniera *univoca* dallo stato presente

Nel 1963, il matematico statunitense Edward Lorenz mise esplicitamente in luce gli aspetti caotici di un sistema mettendo in evidenza come la sua esistenza non fosse una curiosità del caso particolare da lui studiato, bensì una proprietà assai comune nei sistemi deterministici. Il modello di Lorenz è un sistema descritto da equazioni dedotte dalle equazioni della gasdinamica, con opportune condizioni al bordo e con approssimazioni (assai grossolane). Lorenz utilizzò questo modello per mostrare che i moti dell'atmosfera non possono essere descritti con precisione fissata oltre un tempo in pratica assai breve, anche se da un punto di vista matematico i moti obbediscono a un'equazione strettamente deterministica, eventualmente anche semplice. Si trova che per ogni $r \geq 0$ un qualunque dato iniziale evolve entrando in un tempo finito dentro una sfera con centro $(0, 0, r-1)$ e raggio abbastanza grande. I moti del sistema sono confinati e si vuole studiarne il comportamento asintotico per $t \Rightarrow \infty$. Si trova che, per r piccolo, ogni dato iniziale evolve semplicemente verso lo stato di equilibrio $x=y=z=0$. Ma, al crescere di r ($r > 1$), si osserva che questo stato di equilibrio non descrive più il comportamento asintotico di uno stato iniziale scelto a caso. Il sistema evolve verso uno degli altri due punti di equilibrio, finché, continuando a crescere r , si raggiunge un valore critico tale che un dato iniziale preso a caso non evolve né verso l'origine, né verso gli altri due punti fissi (che ora rappresentano due stati di equilibrio instabile).

Modello di Lorenz

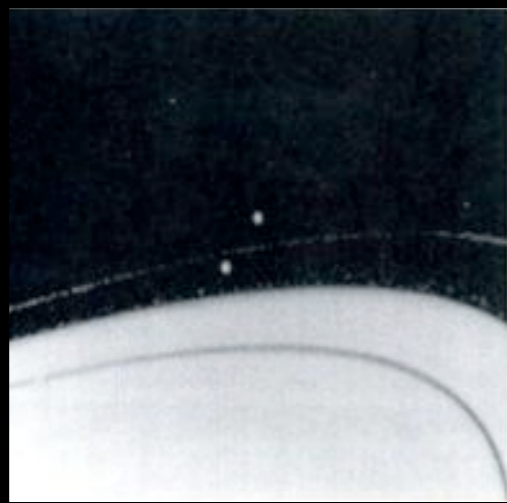
$dx/dt = \sigma(x-y)$, $dy/dt = -xz + rx - y$, $dz/dt = xy - bz$
con σ e b fissati e r parametro variabile che misura l'intensità delle forze che tengono in moto il sistema

Due segmenti dell'evoluzione tridimensionale di due traiettorie nell'attrattore di Lorenz, che iniziano in due punti la cui posizione differisce solo per 10^{-5} . Inizialmente le due traiettorie sembrano coincidere, ma per $t > 23$ la differenza è dell'entità della traiettoria stessa. Per $t = 30$ le due traiettorie non coincidono più.



Le equazioni di Lorenz producono anche il *mixing* topologico (nella regione dell'attrattore). La regione rossa viene trasformata dalla dinamica prima nella regione arancione e poi in una nuvola di punti diffusi nello spazio

Un tour nel sistema di Saturno



Iperione fu scoperto il 16 settembre 1848 da George Phillips Bond and William Lassell

La prima sonda ad avere un *rendevous* con Iperione fu Voyager 2, il 24 agosto 1981.

ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY,
 Vol. IX. November 10, 1848. No. 1.

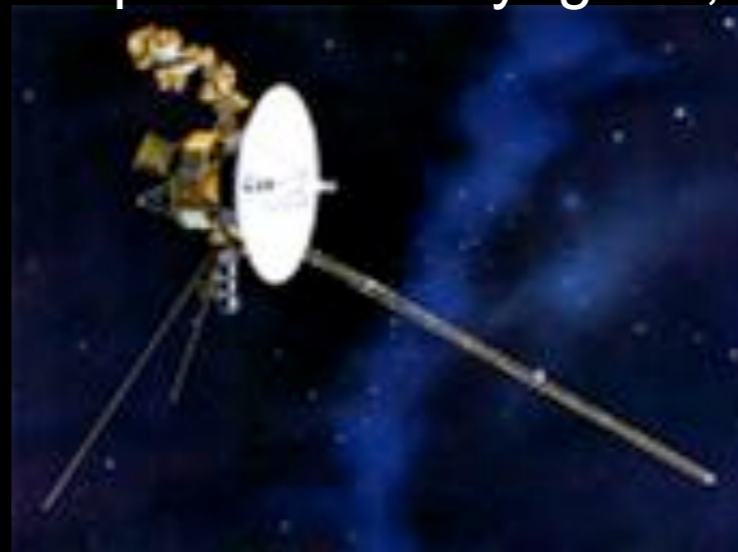
Capt. W. H. Smyth, R.N., Vice President, in the Chair.
 Major-General Sir Wm. Morrison, K.C.B. was balloted for, and duly elected a Fellow of the Society.

*Discovery of a new Satellite of Saturn.** By Mr. W. C. Bond, Director of the Observatory of Cambridge, U. S.

* As it may be interesting to the Society to know the evidence indicating the existence of an eighth satellite of Saturn, I subjoin, somewhat in detail, our observations upon it.

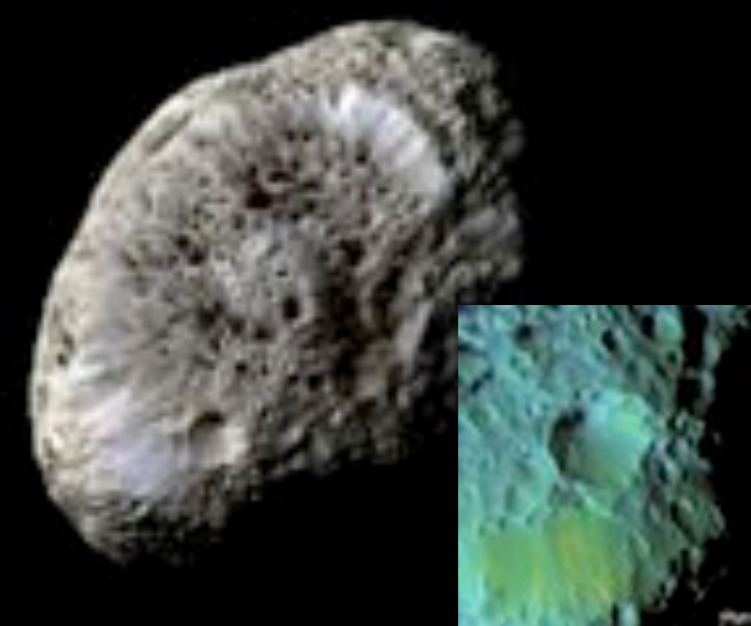
— On the 16th September, a point of light, resembling a star of the 17th magnitude, was noticed in the plane of Saturn's ring, between Titan and Jupiter, by Mr. G. P. Bond, and entered by him in his diagram of the satellites and stars in the neighbourhood. On the 18th it was again seen similarly situated, and was recorded by us both, with a doubt expressed as to its character.

Bond, W. C. "Discovery of a new Satellite of Saturn." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1848.



Il 26 settembre 2005 un esame più ravvicinato è stato fatto dalla sonda Cassini-Huygens, che riprese le notevoli immagini della sua superficie dall'aspetto spugnoso.

Iperione risulta essere il più grande corpo di forma irregolare del sistema solare (410 x 260 x 220 km, 8a come dimensione tra le circa 60 lune di Saturno + centinaia che fanno parte degli anelli)



Caos nel sistema solare

Il caso di Iperione

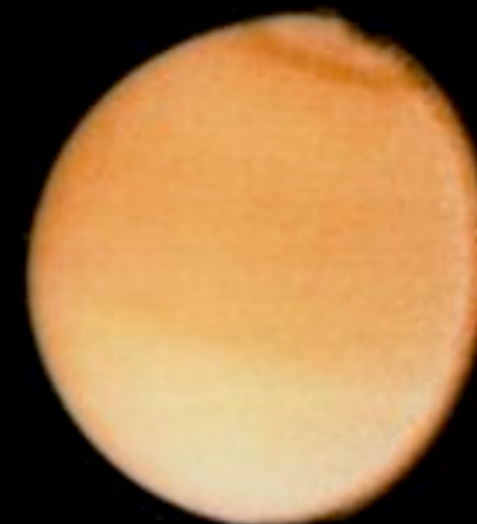
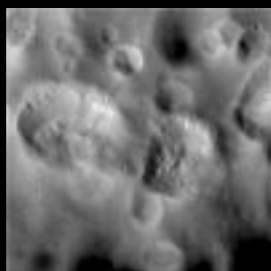
Un satellite di forma così allungata, con il suo asse più lungo puntato verso l'equatore di Saturno, avrebbe dovuto ruotare intorno al suo asse più corto. Il Voyager 2 rivelò invece che Iperione non ha un asse fisso di rotazione, a causa delle perturbazioni indotte dalla gravità di Titano, la più grande delle lune di Saturno, la seconda nel sistema solare dopo Ganimede, una luna di Giove. Inoltre, contrariamente a tutti i satelliti più grandi, Iperione non ha la risonanza 1:1 tra i periodi orbitale e rotazionale.

A causa della sua forma allungata e dell'influenza di Titano, Iperione fa capriole durante il suo moto lungo l'orbita, come fu mostrato con simulazioni al computer già nel 1984 da J. Wisdom, S. Peale e F. Mignard.

Titano fu scoperta da Huygens nel 1655. Ha una rotazione di circa 16 giorni e rivolge sempre la stessa faccia verso Saturno. È l'unica luna dotata di nuvole e di un'atmosfera di tipo planetario.

Missione Cassini-Huygens

La sonda Huygens è scesa su Titano inviando la prima immagine il 14 gennaio 2005.



Cassini, 26 settembre 2005. Massimo avvicinamento ad un'altitudine di circa 500 km.

Iperione

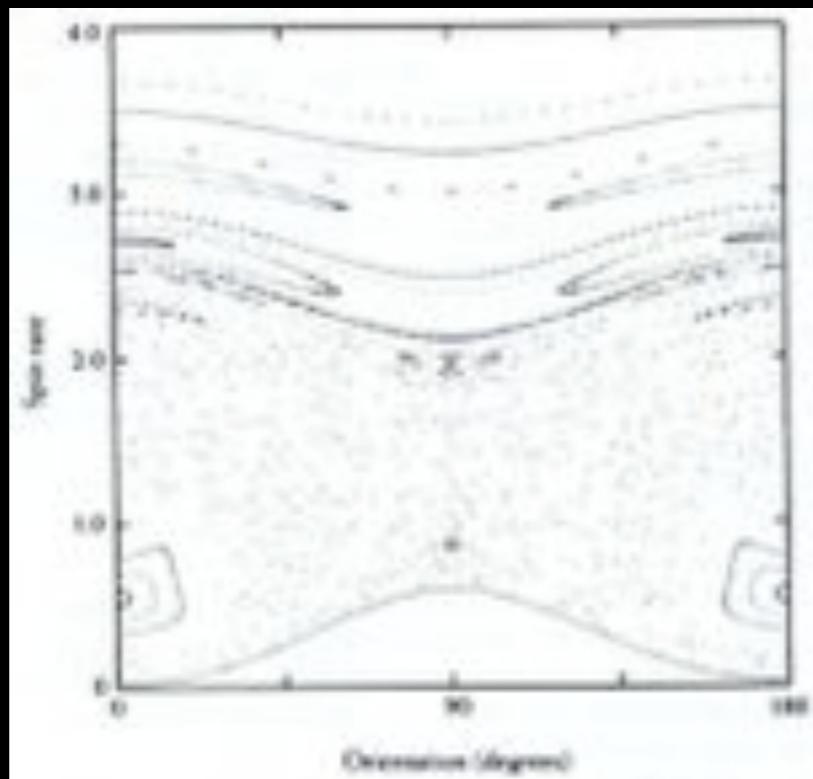
una luna sull'orlo del caos



Se Iperione subisce uno o più urti che ne staccano dei frammenti, tali frammenti finiscono nella regione caotica. Eventuali corpi che vi si trovassero sarebbero presto spazzati via da incontri ravvicinati con Titano, o addirittura cadrebbero su Titano, perché verrebbe a mancare il meccanismo di “protezione” garantito dalla risonanza. Iperione quindi resterebbe di forma irregolare, come confermato dalle immagini inviate dalla sonda Voyager.

Nel sistema solare esistono molti casi di corpi che hanno periodi orbitali (e qualche volta di rotazione) legati fra loro da rapporti frazionari semplici ($1/1$, $1/2$, $2/3$, $3/4$...).

Un caso particolare legato al fatto che tali condizioni resistono su tempi dell'ordine dei miliardi di anni all'azione delle forze gravitazionali riguarda la coppia dei satelliti di Saturno, Titano e Iperione, il cui rapporto tra i periodi orbitali è molto prossimo al valore $3/4$. Ciò significa che tra due successive congiunzioni dei due satelliti, Titano compie 4 rivoluzioni complete intorno a Saturno, mentre Iperione ne compie 3. Nel complesso, l'attrazione di Titano fa sempre in modo che la congiunzione si sposti costantemente verso una determinata posizione, coincidente con l'apocentro dell'orbita di Iperione.

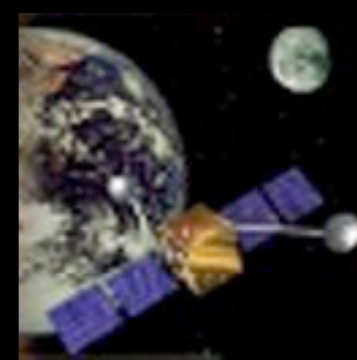
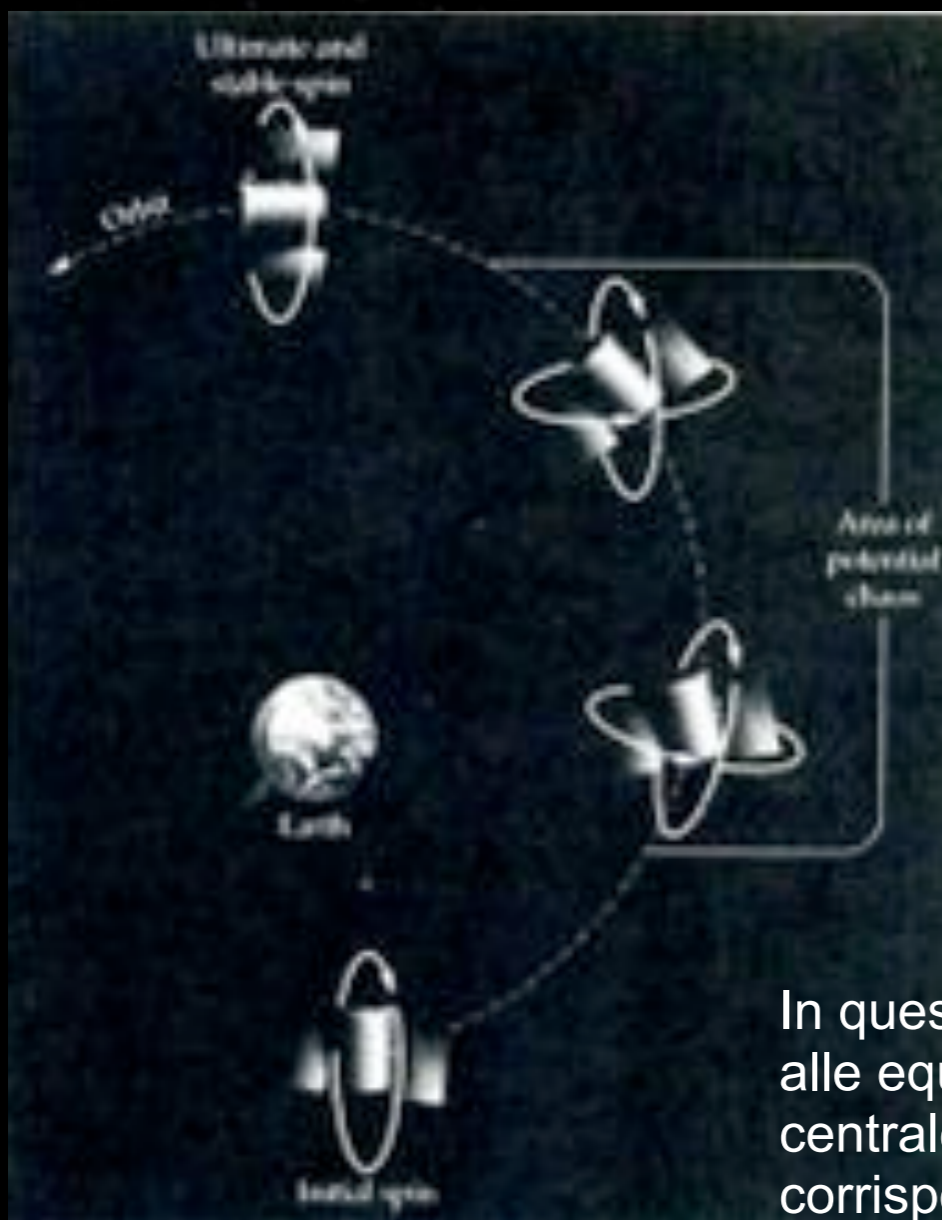


Se si assume che il moto di Iperione si svolga sotto la sola attrazione di Saturno e Titano (quest'ultimo in orbita circolare attorno a Saturno e si fanno i disegni nel piano delle sequenze di punti che rappresentano le possibili orbite di Iperione, si scopre che per alcune condizioni iniziali, compresa quella che corrisponde al vero Iperione, il moto è regolare; per condizioni iniziali diverse, ma non di molto, il moto è caotico. Fu tra i primi esempi di moto caotico trovati in situazioni astronomiche reali, verso la fine degli anni '70 (P. Farinella, A. Milani, A. Nobili).

Satelliti in orbita terrestre



Bonolis AIF



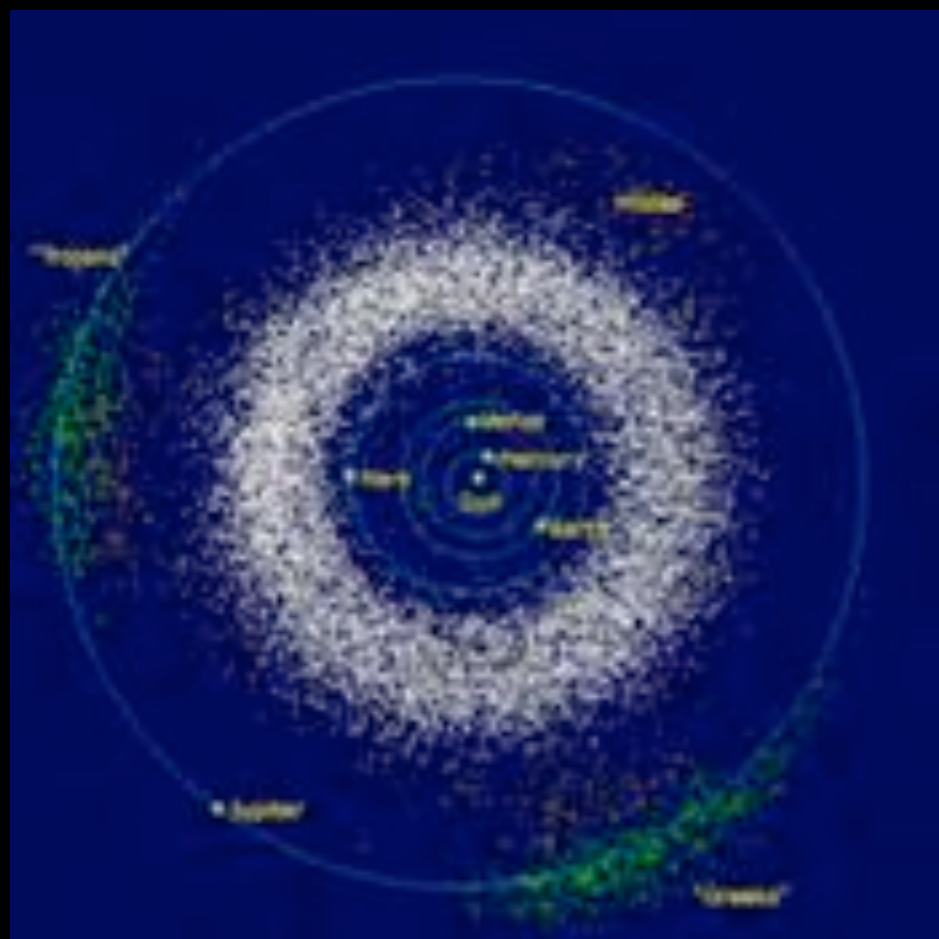
In questa immagine dell'*emisfero nord* dello spazio delle fasi corrispondente alle equazioni del moto per satelliti in orbita intorno alla Terra, il punto centrale rappresenta un'orbita circolare. Punti più lontani dal centro corrispondono a orbite con eccentricità crescenti e più piccole inclinazioni.



La fascia degli asteroidi e le lacune di Kirkwood



Bonolis AIF 2009



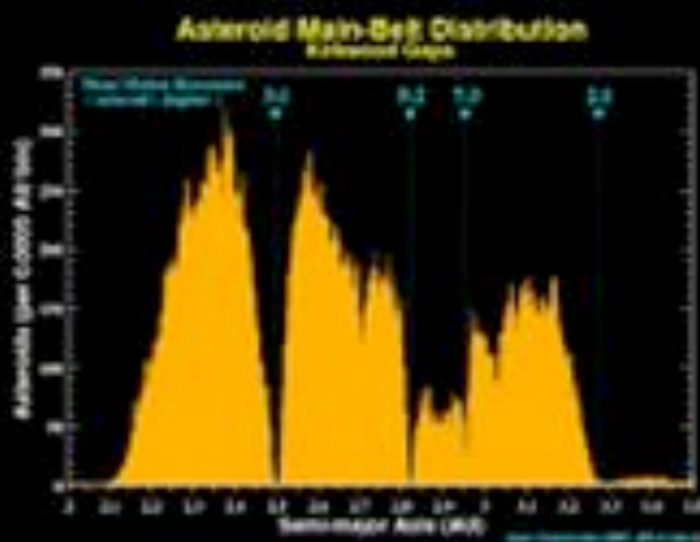
Prima immagine dell'asteroide Gaspra inviata dalla sonda Galileo nel 1991



Giuseppe Piazzi scopre Cerere il 1 gennaio 1801. Considerato prima come un pianeta, poi come un satellite, più tardi come un pianeta nano



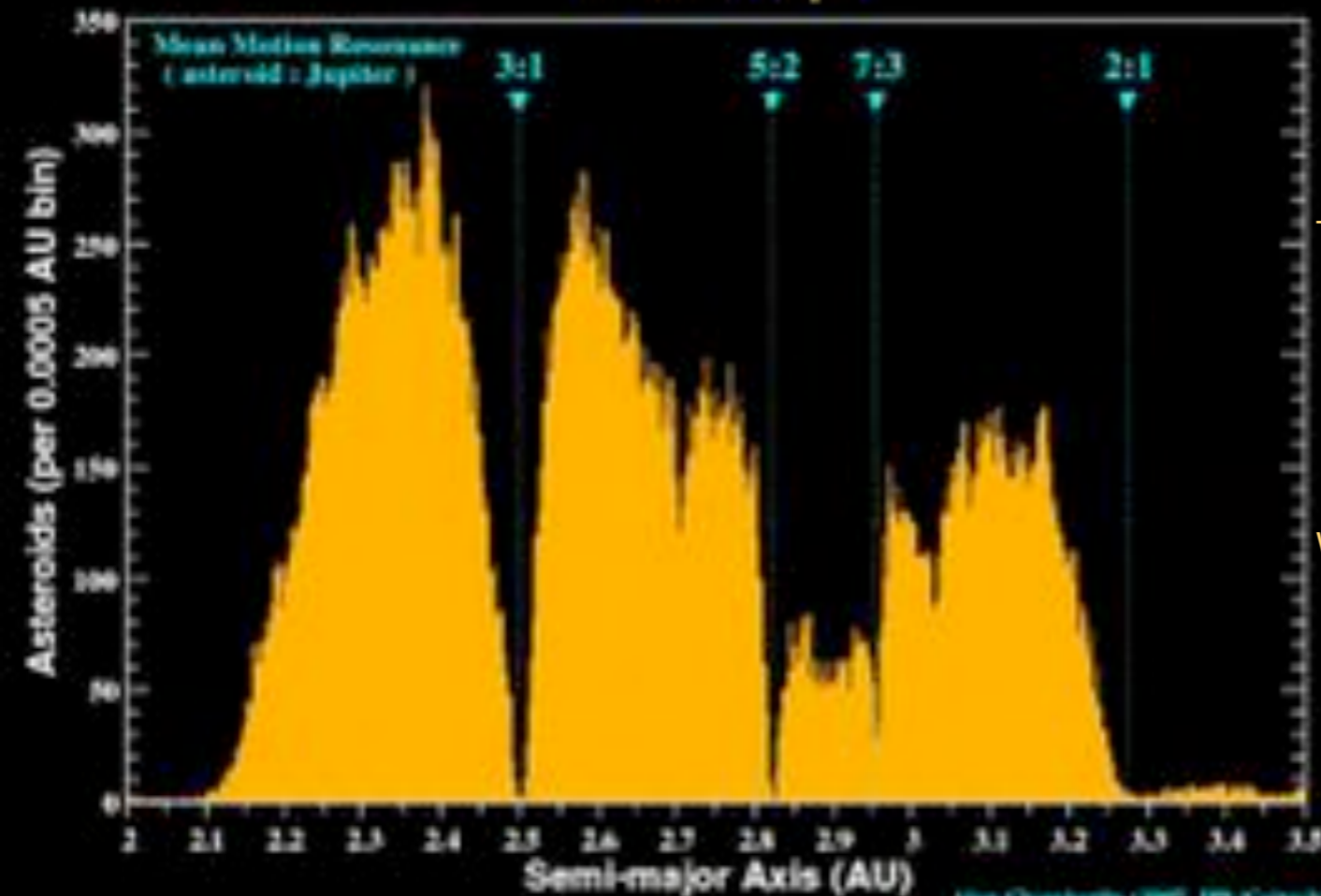
Cerere vista dal telescopio Hubble



La maggior parte degli asteroidi si trovano in una regione tra le orbite di Marte e di Giove (centrata intorno a circa 2.8 Unità Astronomiche (distanza media tra Terra e Sole, circa 150 milioni di chilometri). La regione contiene un certo numero di zone prive di asteroidi, il risultato di interazioni gravitazionali con i pianeti. In alcune zone corrispondente alla risonanza 3:2 (gruppo Hilda) c'è invece una sovrabbondanza di asteroidi. La zona contiene 230 oggetti con diametro superiore a 100 km.

Risonanze nella fascia degli asteroidi

Asteroid Main-Belt Distribution
Kirkwood Gaps



Le lacune furono notate la prima volta nel 1857 da Daniel Kirkwood, che spiegò correttamente come la loro origine fosse da collegare con le risonanze orbitali con il pianeta Giove. Le più importanti sono la 2:1, la 3:1, la 5:3 e la 7:2.

The most prominent Kirkwood gaps (see diagram) are located at mean orbital radii of:

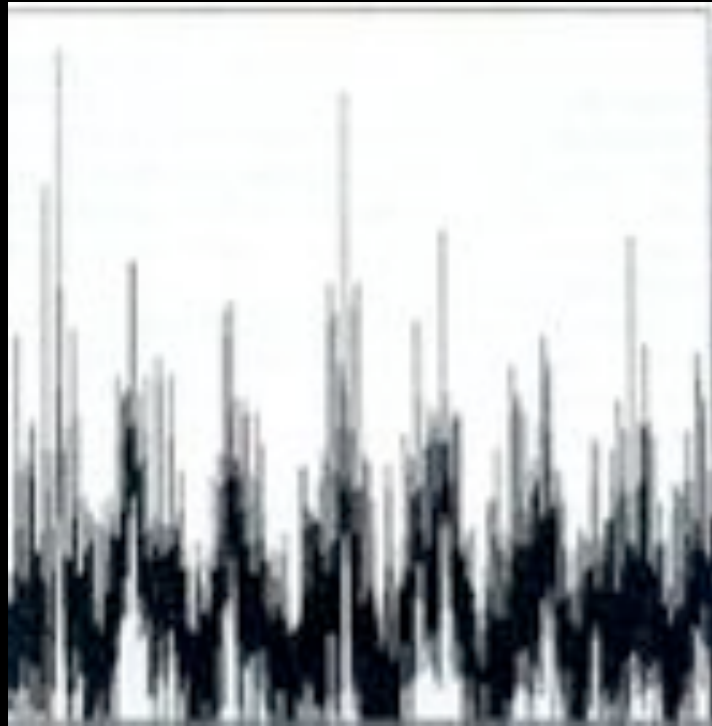
- 2.06 AU (4:1 resonance)
- 2.5 AU (3:1 resonance), home to the Alinda family of asteroids
- 2.82 AU (5:2 resonance)
- 2.95 AU (7:3 resonance)
- 3.27 AU (2:1 resonance), home to the Griqua family of asteroids

Weaker and/or narrower gaps are also found at:

- 1.9 AU (9:2 resonance)
- 2.25 AU (7:2 resonance)
- 2.33 AU (10:3 resonance)
- 2.71 AU (8:3 resonance)
- 3.03 AU (9:4 resonance)
- 3.075 AU (11:5 resonance)
- 3.47 AU (11:6 resonance)
- 3.7 AU (5:3 resonance)

L'istogramma mostra chiaramente le lacune principali di Kirkwood nella fascia principale degli asteroidi. Sono causate da risonanze del moto medio fra asteroidi e Giove. Nel caso della lacuna 3:1 la lacuna si trova in corrispondenza della zona dove il rapporto tra il periodo orbitale dell'asteroide e quello di Giove sta nel rapporto 3/1. L'effetto di queste risonanze è quello di modificare gli elementi orbitali dell'asteroide, in particolare il semiasse maggiore.

Il gap 3: I nella fascia degli asteroidi



Spettro di potenza di una variabile correlata all'eccentricità dell'orbita di Giove. Rivela la complessità del moto del pianeta. Un pianeta solitario rivelerebbe comunque un'orbita puramente periodica, ma con una **singola frequenza caratteristica**, corrispondente a una singola linea verticale nel suo spettro di potenza.

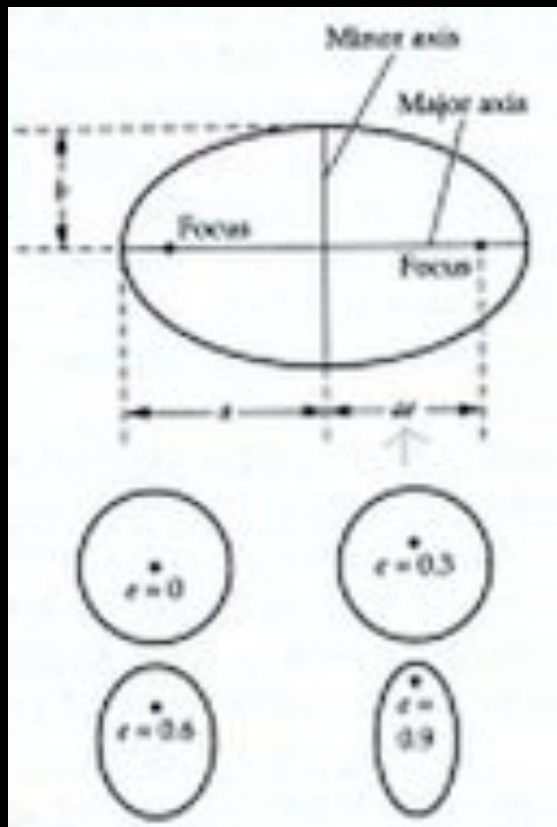
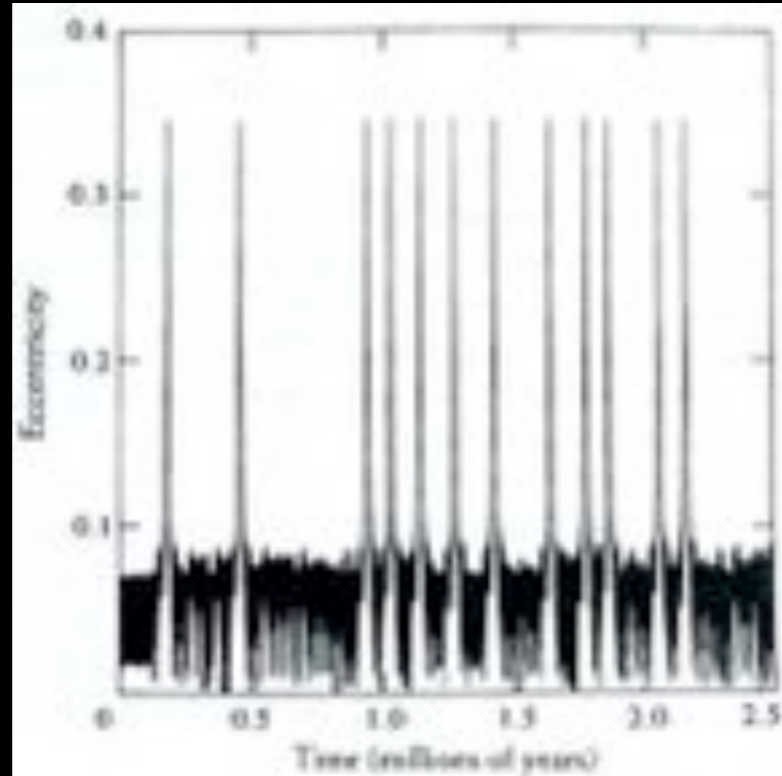


Varie ipotesi sull'esistenza delle lacune, tra cui: *potevano ricondursi alle condizioni in cui si era formato il sistema solare? Oppure erano legate ai processi stessi della sua formazione?*

Negli anni '70 del Novecento, il problema fu affrontato in maniera completamente diversa, attraverso il computer. Divenne subito evidente come nello spazio delle fasi in cui venivano graficate le posizioni e le velocità degli asteroidi e dei pianeti, si osservavano regioni di comportamento regolare, prevedibile e regioni caotiche, di comportamento non prevedibile. Per alcune combinazioni delle condizioni iniziali (posizioni e velocità) il futuro appariva chiaro, per altre rimaneva nebuloso. In questo spazio astratto, le risonanze apparivano spesso come piccole isole di apparente stabilità circondate da zone di caos

Marte spazzino

Una simulazione numerica dell'evoluzione di un asteroide situato nella lacuna 3:1 nella fascia degli asteroidi su un intervallo di tempo di vari milioni di anni mette in evidenza forti sbalzi intermittenti di eccentricità. L'asteroide può trovarsi quindi a tagliare l'orbita di Marte e verrà così espulso dalla sua orbita in occasione di un incontro ravvicinato con il pianeta.



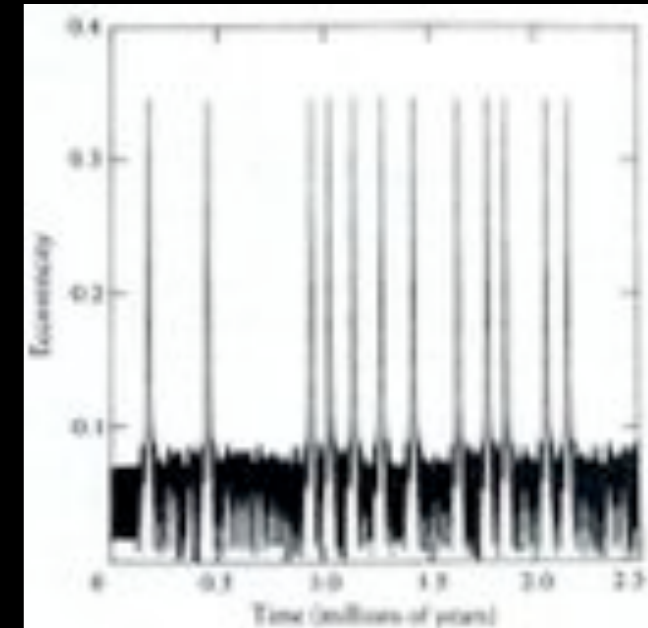
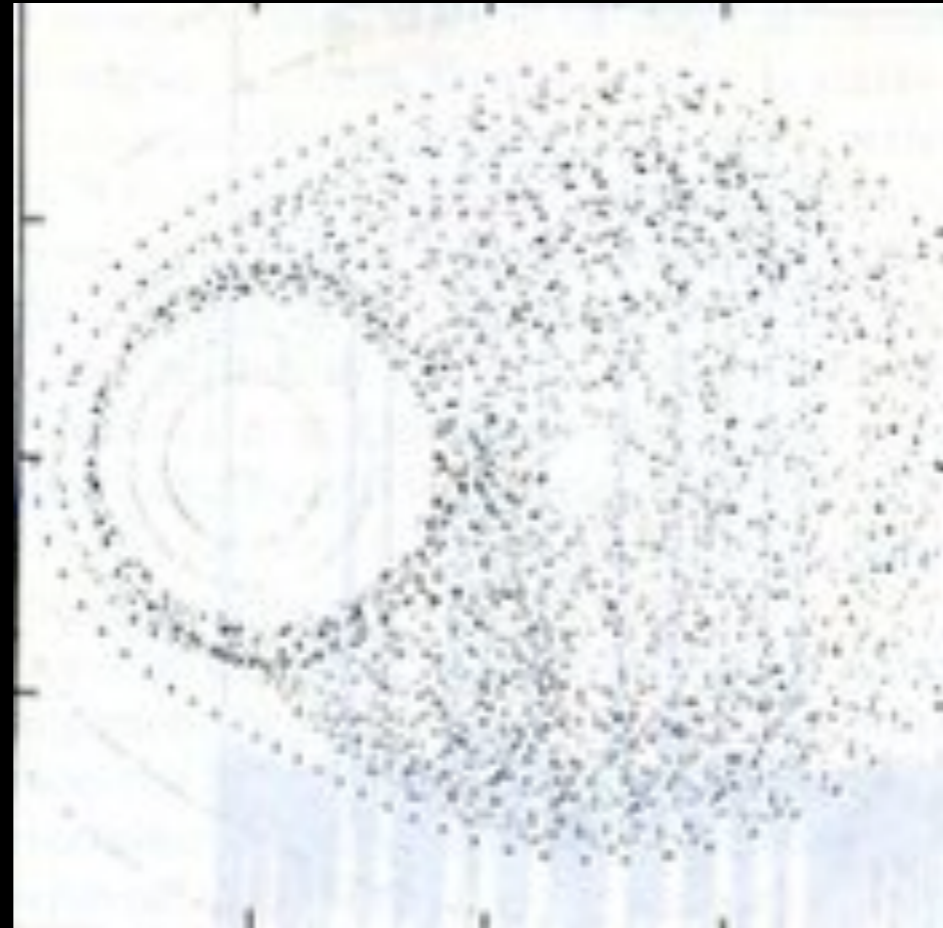
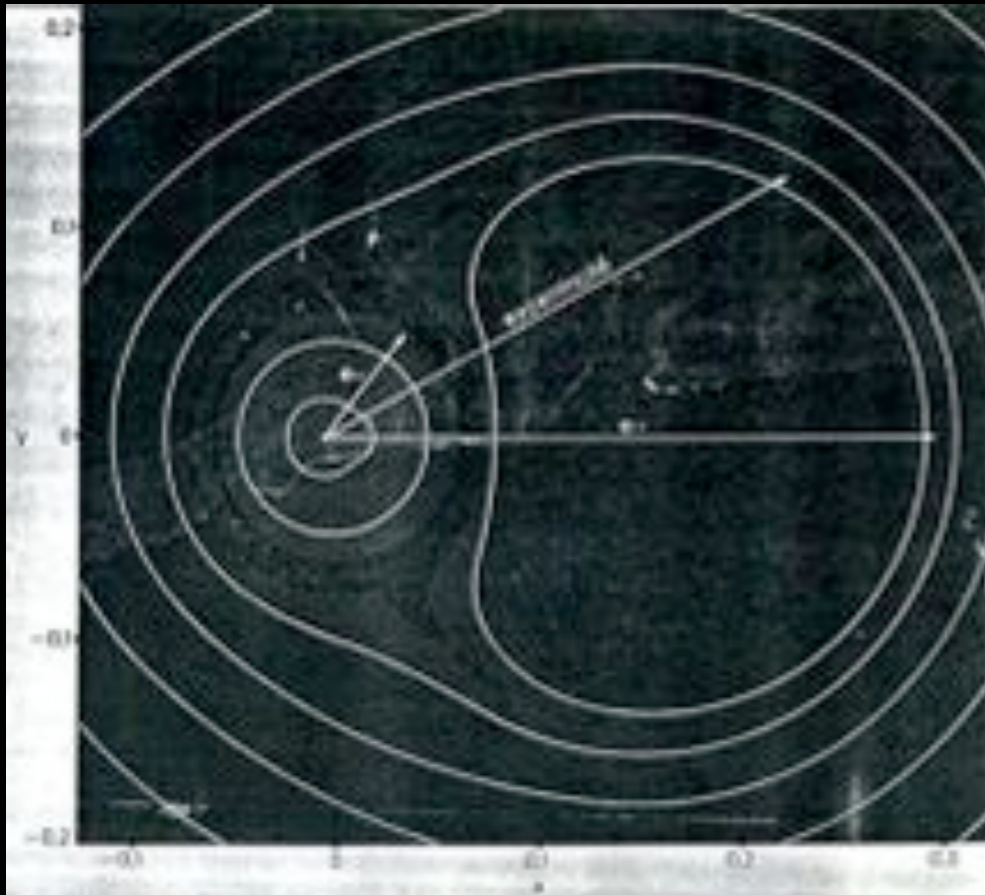
La vera svolta venne dalla collaborazione tra Sussman e Wisdom che all'inizio degli anni '80 del secolo scorso sfruttarono le possibilità offerte da un supercomputer (10 computer collegati tra loro, un planetario digitale (*Digital Orrery*))



Le frontiere della zona caotica 3:1: teoria e osservazione. In teoria la regione compresa fra le due linee non dovrebbe contenere asteroidi. Pallini e crocette, che rappresentano i valori osservati, confermano questa previsione



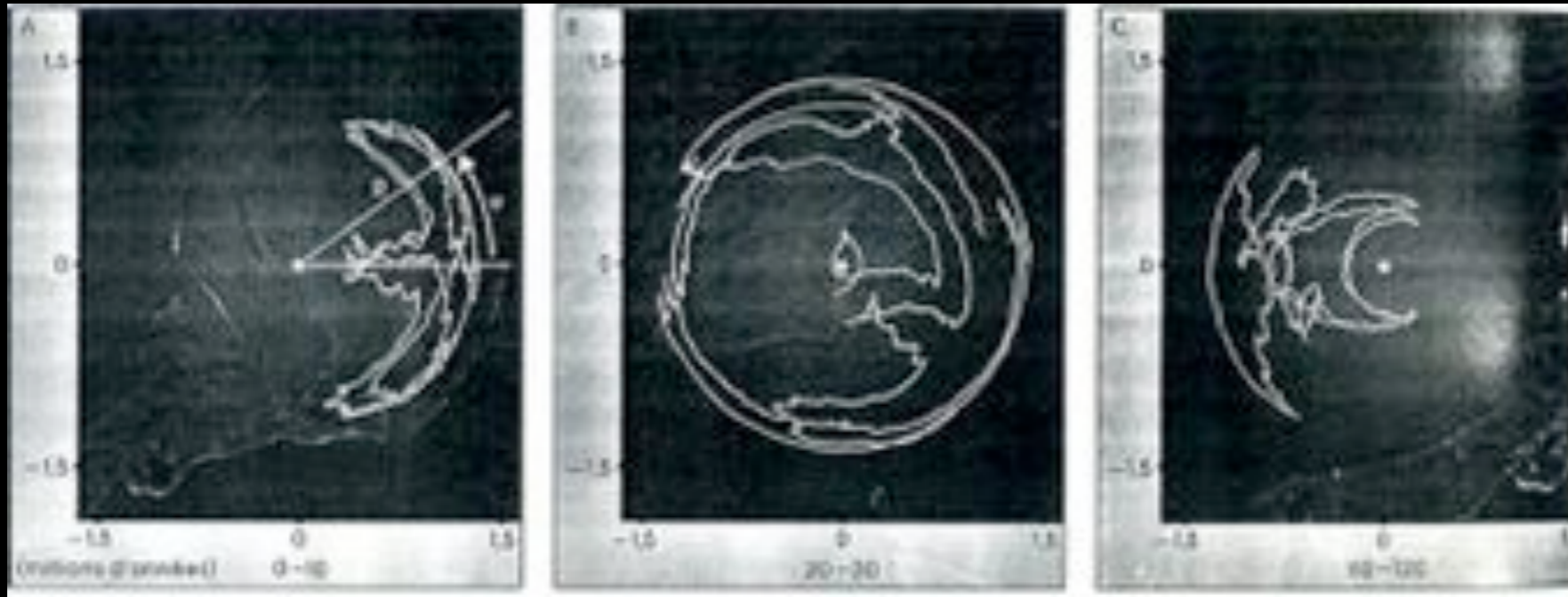
Sezioni di Poincaré per il gap 3:1



La sezione di Poincaré per un asteroide in risonanza 3:1 con Giove presenta due bande caotiche distinte, le quali spiegano i picchi nell'eccentricità

La sezione corrispondente alla traiettoria della simulazione numerica mostra che l'esistenza di questi sbalzi di eccentricità è dovuta alla forma della zona caotica nella quale si trova l'orbita precedente. La zona caotica può essere descritta interamente dall'orbita. Quando l'orbita resta nella parte principale della zona, centrata sull'origine, l'eccentricità resta moderata (e_m). Ma di tanto in tanto la traiettoria trova il piccolo passaggio (P) attraverso il ramo stretto della zona caotica, il che fa passare a un valore elevato dell'eccentricità (e_M)

Stabilità nel sistema solare caos in simulazioni



Bonolis AIF

Come molti piccoli corpi i pianeti non sono risparmiati dalla dinamica caotica, ma i suoi effetti si fanno sentire solo su durate superiori a decine di milioni di anni. Le simulazioni mettono in evidenza il carattere caotico del moto della Terra e di Marte. L'angolo φ è una combinazione di angoli di precessione che intervengono nel moto dei due pianeti e il raggio R è una quantità che ha la stessa natura della loro eccentricità. Ciascuna figura rappresenta l'evoluzione di traiettorie nel corso di dieci milioni di anni a differenti date nel passato. Nei primi 10 milioni di anni (A) si assiste a una librazione, oscillazione dell'angolo su un intervallo limitato, analogamente alle piccole oscillazioni di un pendolo, il che è caratteristico della risonanza. Ma il moto non resta in librazione. Nel giro di 20/30 milioni di anni (B), passa alla circolazione, l'angolo descrive dei cerchi completi e si assiste a passaggi successivi in librazione (110-220 milioni di anni) (C), poi in circolazione. Il moto si colloca quindi nella zona caotica di transizione che circonda una risonanza. Queste transizioni, estremamente dipendenti dalle condizioni iniziali, implicano la divergenza esponenziale di orbite inizialmente vicine e quindi l'impossibilità pratica di predire il moto della Terra oltre circa 100 milioni di anni.

