Associazione per l'Insegnamento della Fisica
Scuola di Storia della Fisica
Ferrara, 30 novembre - 5 dicembre 2009

Mathematici e fisici a Göttingen

La nascita delle superleggi: simmetrie e invarianze

Luisa Bonolis

Nel mio lavoro ho sempre cercato di unire la Verità con la Bellezza, ma quando ho dovuto scegliere tra l'una e l'altra, in genere ho scelto la Bellezza

Hermann Weyl

luisa.bonolis@roma1.infn.it

Perché vale in generale l'atteggiamento di considerare le questioni della matematica o della scienza da un punto di vista storico?... Io credo che oggi più che mai abbiamo bisogno di questo modo di vedere le cose. In particolare per quanto riguarda la scienza molto dipende da quanto i suoi rappresentanti siano capaci di considerare se stessi e la loro sfera di azione come elementi di una lunga serie di sviluppi, e fino a che punto siano in grado di trarre un insegnamento per il presente e per il futuro dalla consapevolezza di questo legame.

Richard Courant (1926)

Nascere a Erlangen

Ida Amalia Kaufmann
(1852-1915)

Max Noether
1884-1921

Erlangen, casa natale
di Emmy Noether
(23 marzo 1882)

Bonolis AIF 2009

Una studentessa molto speciale

Max Noether
leader della geometria algebrica

Università di Erlangen

In Germania e in Austria l'educazione formale delle ragazze terminava all'età di 14 anni.
Nel 1898 il senato accademico dell'Università di Erlangen, dove Max Noether era professore, dichiarò che l'ammissione di studenti di sesso femminile avrebbe "sovvertito tutto l'ordine accademico".

Emmy Noether con i suoi fratelli Alfred, Fritz e Robert

Nel 1900, quando Emmy ha diciotto anni, l'Università di Erlangen, consente finalmente alle donne di assistere alle lezioni; tale permesso, così pure la possibilità di sostenere un colloquio finale per ottenere un certificato universitario dipendeva completamente dalle simpatie dell'esaminatore. Fino alla prima guerra mondiale esistevano in Germania professori che si rifiutavano di fare lezione se erano presenti donne in aula.

Autunno 1900: Emmy è una delle due uniche donne su 1000 studenti dell'Università di Erlangen, una delle tre università libere della Germania. Frequenta come **uditrice** le lezioni di matematica, romanistica e storia. Nel frattempo si prepara privatamente per l'esame di maturità, che sostiene nel luglio 1903. L'autunno successivo va a Göttingen.

Göttingen
la mecca della matematica

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
1805-1859

Bernhard Riemann
1826-1866

Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

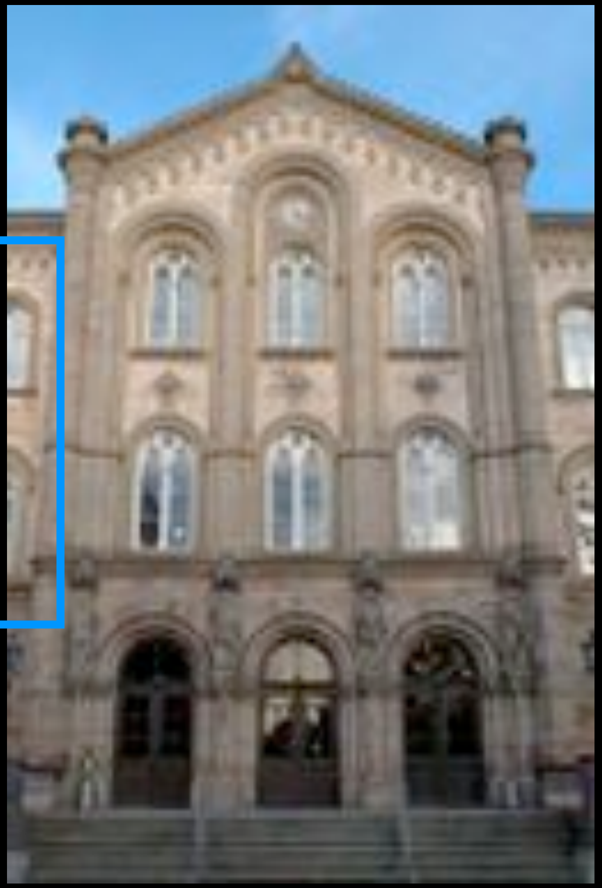
Alfred Clebsch
1833-1872

Christian Felix Klein
1849-1925

Il divino Felix

Il leggendario Klein era il più venerato esponente della matematica tedesca di fine ‘800. La sua fama attirava a Göttingen studenti da tutto il mondo, particolarmente dagli Stati Uniti.

Christian Felix Klein
1849-1925



“Fai la valigia e vai a Göttingen”

David Hilbert
1862-1943

Il cuore della vita matematica si trovava nella sala di lettura voluta da Klein, dove gli studenti potevano accedere liberamente ai libri messi a loro disposizione in scaffali aperti.

Il divino Felix

Christian Felix Klein
1849-1925

“Fai la valigia e vai a Göttingen”

A Hermann Weyl, anche lui arrivato a Göttingen nel 1903, Hilbert apparve come il Pifferaio magico, che con l'irresistibile richiamo del suo dolce flauto lo attirava nel profondo fiume della matematica

Arnold Sommerfeld
1868-1951

David Hilbert
1862-1943

Nel 1893 arriva Sommerfeld, (allievo di Hilbert a Königsberg) che subisce la forte influenza di Klein. Tredici anni dopo cominciò a insegnare fisica teorica a Monaco.

1903-1904
Emmy Noether frequenta l'Università di Göttingen come uditrice e segue i corsi di Felix Klein, David Hilbert e Karl Schwarzschield

Felix Klein e il programma di Erlangen

Felix Klein

Sophus Lie
1842-1899

L'idea fondamentale di Klein è che ogni geometria può essere caratterizzata da un gruppo di trasformazioni e che il vero oggetto della geometria sono le proprietà invarianti rispetto a questo gruppo di

Il gruppo di una qualsiasi geometria metrica è costituito da trasformazioni affini il cui determinante è uguale a ±1. La prima delle geometrie metriche è quella euclidea. Dal punto di vista algebrico, le trasformazioni che costituiscono il gruppo euclideo sono rappresentate dalle equazioni ($\rho = \pm 1$)

$x' = \rho(x \cos\theta - y \sin\theta + \alpha)$

$y' = \rho(x \sin\theta - y \cos\theta + \beta)$

I suoi invarianti sono lunghezza, ampiezza angolare e dimensioni e forma di una qualsiasi figura. Im questa classificazione la geometria euclidea è l'insieme delle proprietà che sono invarianti rispetto a questo gruppo di trasformazioni, le quali sono rotazioni, traslazioni e riflessioni.

Felix Klein e il programma di Erlangen

La geometria dal punto di vista delle trasformazioni

Nel 1872, a soli 23 anni, Klein era già diventato professore a Erlangen e la sua prolusione sull'esame comparato delle recenti ricerche in geometria, divenne nota come «Programma di Erlangen», faceva ormai parte della storia della matematica.

Il nucleo del progetto di Klein consisteva nell'utilizzare la teoria dei gruppi come strumento teorico per rifondare la geometria come studio delle proprietà di uno spazio che restano invariate sotto l'azione di un certo gruppo di trasformazioni. Le diverse geometrie, la geometria euclidea, la geometria proiettiva, la geometria affine e le stesse geometrie non euclidee - tutte apparentemente scorrelate - vengono unificate e classificate, secondo l'insieme delle trasformazioni che lasciano invariate certe caratteristiche dei relativi spazi geometrici. Per esempio, nella geometria euclidea, il gruppo costituito dalle rotazioni, dalle traslazioni e dalle riflessioni, lascia invariata la lunghezza dei segmenti, la grandezza degli angoli, la dimensione e la forma delle figure del piano o dello spazio. Attraverso il concetto di gruppo le proprietà geometriche acquistavano il carattere di proprietà di simmetria del singolo spazio; la nozione stessa di geometria diviene astratta: la pluralità delle geometrie si giustifica con la pluralità dei gruppi di trasformazioni.

Hilbert e il problema di Gordan

Klein considerava Hilbert colui che aveva portato la teoria degli invarianti "a uno stadio di consapevolezza critica".

Bonolis AIF 2009

Il problema consisteva nella ricerca dell'esistenza di insieme finito di invarianti (forme algebriche di grado qualsiasi), di una base, nei cui termini potessero esprimersi, attraverso una funziona polinomiale, tutti gli altri infiniti invarianti, senza eccezioni.

Nel 1868 Gordan aveva ottenuto un risultato che tuttavia era relativo a un insieme semplificato di forme algebriche (n=2).

Nei successivi vent'anni i suoi sforzi e quelli di matematici tedeschi, inglesi, francesi e italiani non erano riusciti a venire a capo alla forma più generale del teorema, nota appunto come "*problema di Gordan*". A nulla era valso introdurre calcoli sempre più complicati.

Paul Gordan
1837-1912

Il re della teoria degli invarianti

Hilbert si laurea nel 1885 con una tesi sulla teoria degli invarianti algebrici. Klein gli consiglia di andare a Parigi, dove entra in contatto con i maggiori matematici francesi e segue le lezioni di Poincaré. Attraverso Hermite viene a conoscenza del famoso "problema di Gordan". Ne rimane affascinato.

Nel 1888 Hilbert dimostra che invece di fornire la prova costruendo la soluzione del problema, o dimostrando come si poteva costruire, dimostra che la soluzione deve esistere sempre, perché l'ipotesi contraria conduce a una contraddizione.

Spazzando via il pesante formalismo di Gordan, Hilbert fornisce una pura dimostrazione di esistenza.

Gordan, che cercava una dimostrazione costruttiva dell'esistenza di una base per gli invarianti, sentenziò: ***"Questa non è matematica. Questa è teologia"***

Ovvero una sorta di atto di fede.

Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si cela l'avvenire, per gettare uno sguardo sui progressi della nostra scienza e sui segreti del suo ulteriore sviluppo nei secoli futuri?

Se vogliamo farci un'idea del probabile sviluppo della conosscenza matematica nell'immediato futuro, dobbiamo passare in rassegna davanti alla nostra mente le questioni irrisolte e guardare ai problemi che la scienza moderna ha di fronte e la cui soluzione ci aspettiamo dal futuro.

David Hilbert

Mathematische Probleme

Parigi 1900

2° Congresso internazionale di matematica





Il programma fondazionale di Hilbert

Bonolis AIF 2009

Die Grundlagen der Geometrie (1899)

Problema n. 6 dei 23 proposti da Hilbert a Parigi: assiomatizzare i campi delle scienze fisiche dove la matematica gioca un ruolo importante

Hilbert a Friedrich L. Frege:

Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo per me è il criterio della verità e dell'esistenza...Si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie... gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i miei punti voglio intendere un sistema qualunque di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino..., allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazione fra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole ogni teoria può sempre essere applicata a infiniti sistemi di enti fondamentali.

I primi e più antichi problemi di ogni branca della matematica, traggono certamente la loro origine dall'esperienza e sono ispirati dal mondo dei fenomeni esterni […] Ma nel progressivo sviluppo di una disciplina matematica lo spirito umano, incoraggiato dalla scoperta di soluzioni, prende coscienza della sua autonomia e crea lui stesso nuovi e fecondi problemi, nella maniera più libera, senza apparenti stimoli esterni e unicamente per combinazione logica, per generalizzazione e particolarizzazione, per separazione e riunione di idee... D'altra parte, sul potere creativo della pura ragione il mondo esterno esercita di nuovo la sua influenza e ci conduce attraverso fatti reali a nuove domande, ci apre nuove regioni della matematica... È su questi reiterati scambi tra ragione ed esperienza che riposano tante analogie sorprendenti, come quell'armonia apparentemente prestabilita, tante volte notata dai matematici, tra le questioni, i metodi e le concezioni dei diversi domini della loro scienza.
(D.H. *Math. Probleme*)

Emmy all’Università di Erlangen

Bonolis AIF 2009

Nel 1903 le università bavaresi concedono la possibilitù di iscrizione alle donne che hanno sostenuto la licenza. Nell’autunno 1904 Emmy si iscrive alla Facoltà di filosofia, frequentando esclusivamente i corsi di matematica. È l’unica donna insieme a 46 uomini.

Nel 1907 Emmy si laurea *summa cum laude*. Suo relatore di tesi è Paul Gordan, il re degli invarianti, collega e grande amico di suo padre. I suoi lavori consistevano in venti pagine di formule ininterrotte e si diceva che le poche righe di testo fossero aggiunte dagli amici...

Paul Gordan

Nel complesso, lo stile del lavoro matematico di Gordan era algoritmico. Rifuggiva dal presentare le sue idee in forme letterarie informali. Derivava i suoi risultati per via computazionale, lavorando in direzione dello scopo desiderato senza offrire spiegazioni dei concetti che ne motivavano il lavoro.

Lise Meitner
1878-1968

Seconda donna laureata a Vienna (1905), nel 1907 Lise Meitner va a Berlino e segue le lezioni di Planck. Viene accolta nell’Istituto di chimica del Kaiser-Wilhelm a Berlino-Dahlem come ricercatrice volontaria.
Dal 1912 al 1915 è assistente di Max Planck. Fu la prima professoressa di fisica della Germania.

Dallo stile algoritmico alla Gordan all'approccio assiomatico alla Hilbert

Emmy inizia a lavorare, senza alcun contratto né compenso, presso l'Istituto di Matematica di Erlangen, collaborando con suo padre e con i due successori di Gordan. Uno di loro in particolare, Ernst Fischer, ebbe un'influenza notevole sul suo lavoro nel campo dell'algebra. Sotto la sua guida Emmy Noether si avvicinerà all'approccio astratto di Hilbert, abbandonando lo stile formale che aveva caratterizzato la sua tesi. Lei stessa definirà il suo lavoro *una giungla di formule*, una pura *faccenda di conti*.

Ernst Sigismund Fischer
1875-1954

Nel 1908 viene eletta membro del *Circolo Matematico di Palermo*.

Nel 1909 viene invitata a far parte della *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. È la prima donna a partecipare alla riunione annuale della Società

"*Ricordo chiaramente una persona in visita che, sebbene una donna, mi sembrò simile a un cappellano cattolico di una parrocchia di campagna. Vestita con un indescrivibile pastrano nero che le sfiorava la caviglia, un cappello da uomo da cui spuntavano capelli corti (ancora una rarità all'epoca) e con una borsa a tracolla sistemata di traerso simile a quella dei ferrovieri all'epoca dell'impero. Era una ben strana figura...*"

(1913, ricordo di un nipote del matematico Franz Mertens)

La *magia* della fisica

Se mettete insieme i 10 uomini più saggi del mondo e chiedete loro di trovare la cosa più stupida che esista, essi non riusciranno a trovare nulla che sia più stupido dell'astrologia!
David Hilbert

Hermann Minkowski
1864-1909

Minkowski a Hilbert (dicembre 1890):
Credo che ormai mi troverai del tutto infettato dalla fisica. Forse dovrei fare una quarantena prima che tu e Hurwitz possiate ammettermi di nuovo alle vostre passeggiate, pronto per la matematica pura... Per avere punti in comune con altri mortali, mi sono arreso alla magia - cioè alla fisica... studio Thomson, Helmholtz e i loro colleghi. Lavoro perfino diversi giorni alla settimana con un camice blu in un istituto che produce strumenti fisici. Sono quindi un uomo pratico della specie più vergognosa.

Max Born
1882-1970

Arriva a Göttingen come studente nel 1904

Minkowski a Hilbert (di ritorno dal convegno di Parigi del 1900):
Con piacere vedo anche ciò che naturalmente ho sempre saputo - che si può imparare molto da te, non soltanto in matematica, ma anche nell'arte di godere la vita con sensibilità come un filosofo.

Mi concentrai sulla matematica e la fisica, rappresentate da Hilbert e Voigt...I corsi di Hilbert ti conducevano sempre in nuovi territori. Uno di questi era sulla meccanica avanzata, basata sui metodi di Hamilton-Jacobi e l'idea delle trasformazioni canoniche. Ciò che imparai là fu più tardi di enorme aiuto nello sviluppo della meccanica a livello atomico, nel periodo 1920-1925, che precedette la nascita della meccanica quantistica (Max Born, Autobiografia)

Hilbert e Minkowski

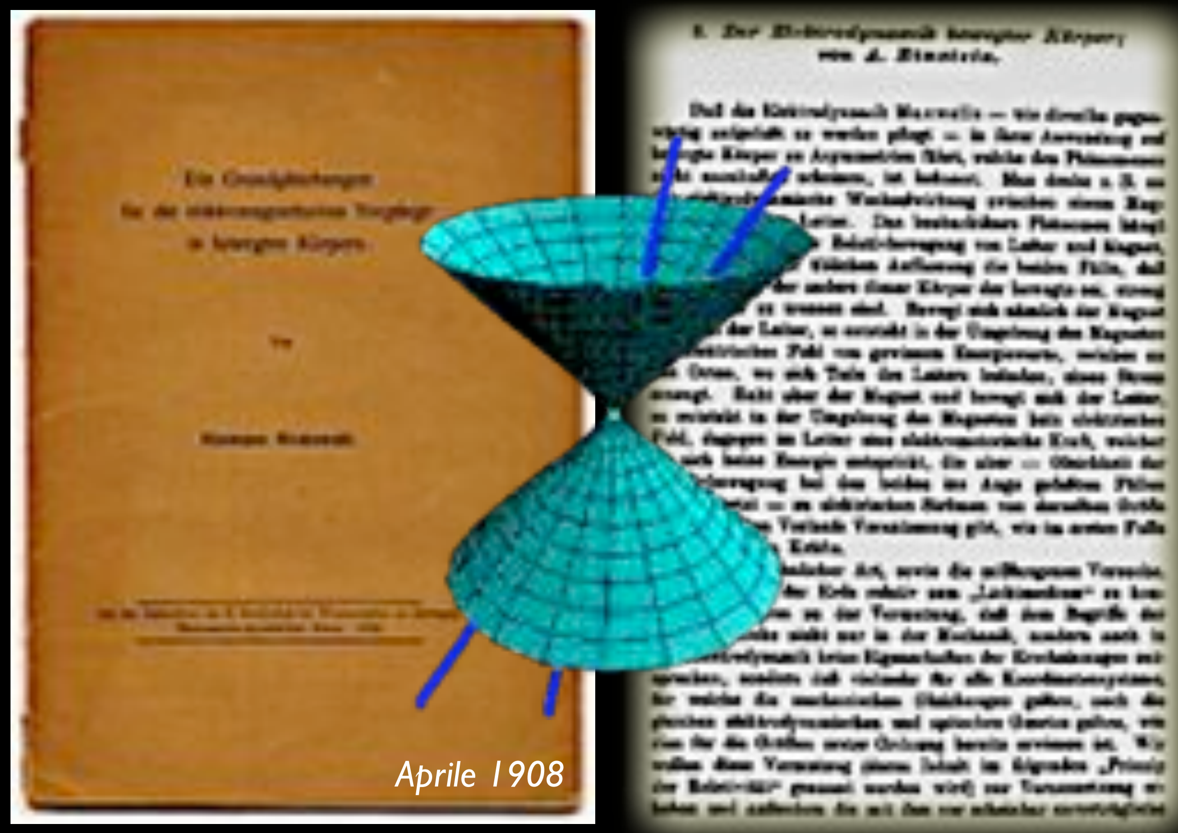
Castore e Polluce

L’unità delle leggi fisiche esercitava una forte attrazione su Minkowski e Hilbert, come una estensione naturale dell’idea di unificazione tra campi matematici apparentemente distanti, idea ebbe un ruolo centrale in tutta l’opera di Hilbert.

Hilbert e Minkowski condividevano una forte fede in ciò che appariva essere una armonia prestabilita tra matematica e mondo fisico.

Nel 1905 entrambi si interessarono all’elettrodinamica di Hendrik Antoon Lorentz e Henri Poincaré.

Secondo Born e Weyl, che erano loro studenti insieme a Max von Laue (auditore post-doc), questi seminari sulla teoria dell’elettrone furono il punto di partenza per il lavoro di Minkowski.



Hilbert, dopo la morte di Minkowski:

Fin dai miei anni studenteschi Minkowski fu il mio più caro e fedele amico... La nostra scienza, che amavamo sopra ogni altra cosa, ci univa entrambi; ci sembrava un giardino pieno di fiori dove ci divertivamo a cercare sentieri nascosti e dove scoprivamo nuove prospettive che soddisfacevano il nostro senso di bellezza. Quando uno di noi le mostrava all’altro e ce ne meravigliavamo insieme, la nostra gioia era completa. Per me lui è stato un dono raro del cielo...

Minkowski e la teoria matematica della relatività

Ottobre 1907 - Minkowski scrive ad Einstein per richiedere una copia del suo articolo sugli Annalen da utilizzare nel seminario sulle equazioni a derivate parziali della fisica che teneva insieme a Hilbert.

Pasqua 1908 - Minkowski tiene una serie di lezioni su "Nuove idee sulle leggi fondamentali della meccanica" rivolte a insegnanti di scienze (L'Enseignement Mathématique 10 (1908) 179).

Aprile 1908 - Minkowski pubblica *Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.*

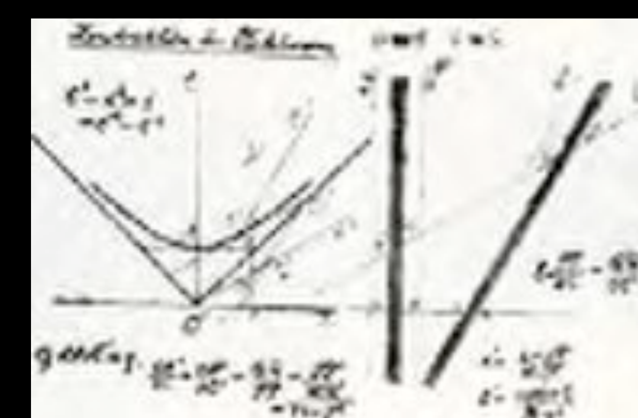
1909, Colonia - Incontro annuale della *Società degli Scienziati e dei Medici Tedeschi*. Nella sezione gestita dalla Associazione dei Matematici, Minkowski ha la possibilità di presentare le sue idee a un pubblico internazionale di fisici, matematici, astronomi, ingegneri.

Signori! Le concezioni dello spazio e del tempo che vorrei sviluppare qui davanti a voi scaturiscono dal terreno della fisica sperimentale. In questo risiede la loro forza. L'indicazione che ne deriva è radicale. Da questo momento in poi lo spazio in se e il tempo in se svaniranno completamente nell'ombra e soltanto una sorta di unione tra i due conserverà ancora una autonomia. Prima di tutto vorrei indicare come, a partire dalla meccanica attualmente accettata, si possa arrivare attraverso considerazioni puramente matematiche a queste mutate idee sullo spazio e sul tempo.

Minkowski e la teoria matematica della relatività

Bonolis AIF 2009

Raum und Zeit, 1909

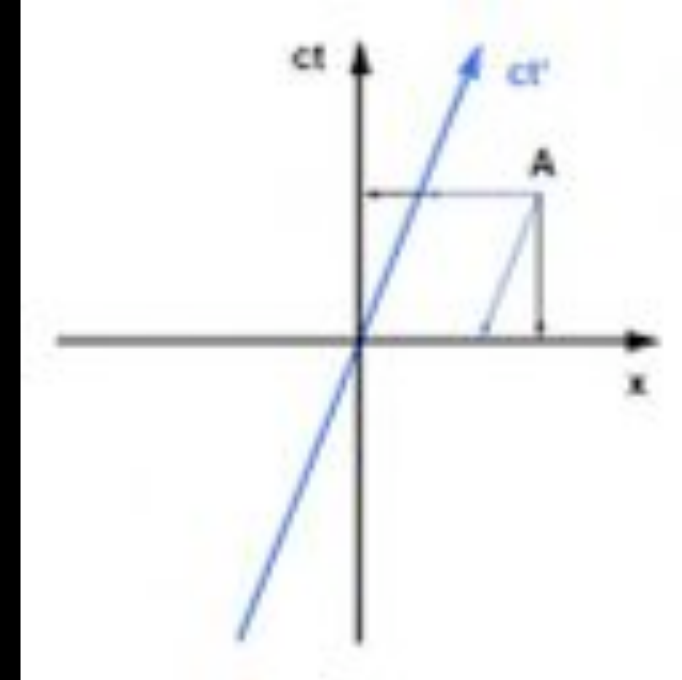


Per dimostrare la differenza tra le vecchie e le nuove idee sullo spazio e sul tempo, Minkowski fece una distinzione tra due gruppi di trasformazioni, rispetto ai quali le leggi della meccanica classica risultano invarianti. Nel considerare l'origine comune per due sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme, notò che gli assi spaziali x y z possono ruotare arbitrariamente intorno all'origine, così che in meccanica classica, a questa operazione corrisponde l'invarianza della somma dei quadrati $x^2 + y^2 + z^2$. Tale caratteristica fondamentale - notava Minkowski - riguarda lo spazio fisico e non ha alcuna connessione con il moto. Minkowski identificò il secondo gruppo con le trasformazioni $x'=x+\alpha t$, $y'=y+\beta t$, $z'=z+\gamma t$, $t'=t$

Così lo spazio fisico, che si supponeva in quiete - osservò ancora Minkowski - di fatto poteva essere in moto traslatorio uniforme. Nessuna decisione sullo stato di quiete poteva essere presa a partire dai fenomeni fisici.

Dopo aver precisato questa distinzione, Minkowski fece una dimostrazione grafica sulla lavagna e nel sollevare la questione della relazione tra questi due gruppi, introdusse l'equazione iperbolica $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$. Notando che $c^2t^2 - x^2$ è invariante se misurata in sistemi inerziali, mostrò come questa ipersuperficie unitaria poteva essere usata per costruire un gruppo di trasformazioni che coincide con il primo quando il parametro $c \Rightarrow \infty$

Il diagramma spazio-tempo di Minkowski e le trasformazioni di Lorentz



The relation between the Minkowski space-time diagram and the special Lorentz transformations is presented in many treatises on special relativity. One way of recovering the transformations from the diagram, recalling a method outlined by Max Laue (1911: 47), proceeds as follows.

A two dimensional Minkowski space-time diagram represents general Cartesian systems with common origins, whereby we constrain the search to linear, homogeneous transformations. For convenience, we let $\ell = ct$ and $\beta = v/c$. These conditions determine the form of the desired transformations:

$$x = \nu\ell' + \rho x' \qquad \text{and} \qquad \ell = \lambda\ell' + \mu x'.$$

On a Minkowski diagram (where the units are selected so that $c = 1$) we draw the invariant curves $\ell^2 - x^2 = \ell'^2 - x'^2 = \pm 1$ (see Figure 4).

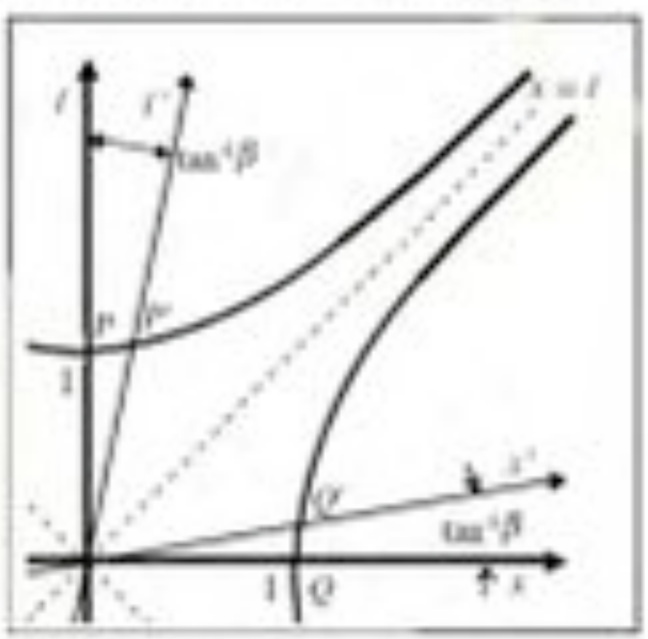


Figure 4. Minkowski diagram of systems S and S'.

Next, we mark two points in the coordinate system $S(x, \ell)$, $P = (0, 1)$ and $Q = (1, 0)$, located at the intersections of the ℓ-axis and x-axis with these hyperbolae. Another system S' translates uniformly at velocity $v = c\beta$ with respect to S, such that the origin of S' appears to move according to the expression $x = \beta\ell$. This line is taken to be the ℓ'-axis. From the expression for the hyperbolae, it is evident that the x'-axis and the ℓ'-axis are mutually symmetric, and form the same angle $\tan^{-1}\beta$ with the x-axis and the ℓ-axis, respectively. The two points in S' are denoted here as $P' = (0, 1)$ and $Q' = (1, 0)$ and marked accordingly, at the intersections of the hyperbolae with the respective axes. The ℓ'-axis, $x = \beta\ell$, intersects the hyperbola $\ell^2 - x^2 = 1$ at P'. Using this data, we solve for the coefficients ν and λ:

$$\nu = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{and} \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Applying the same reasoning to the x'-axis ($x = \ell/\beta$), we solve for the coefficients ρ and μ, evaluating the expressions for x and ℓ at the intersection of the x'-axis with the hyperbola $\ell^2 - x^2 = -1$, at the point labeled Q', and we find

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{and} \qquad \mu = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

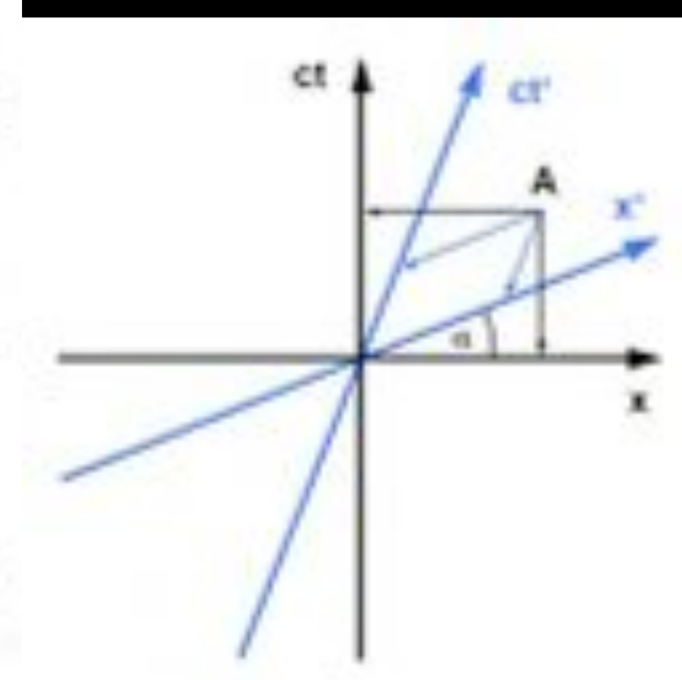
Substituting these coefficients into the original expressions for x and ℓ, we obtain the following transformations:

$$x = \frac{x' + \beta\ell'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{and} \qquad \ell = \frac{\ell' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

The old form of the special Lorentz transformations is recovered by substituting $\ell = ct$ and $\beta = v/c$:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{and} \qquad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Invoking the property of symmetry, the transformations for x' and t' may be calculated in the same fashion as above, by starting with S' instead of S.



Bonolis AIF 2009

I matematici di Göttingen e la relatività

Bonolis AIF 2009

Inizialmente Einstein considerò la formulazione tensoriale di Minkowski una "überflussige Gelehrsamkeit". Ma nel 1912, in piena formulazione della teoria generale, si era ormai pienamente arreso alla matematica e al calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita.

Bernhard Riemann
L'idolo di Klein

Neologismi: Weltpunkt, Weltlinie, Weltachse, Welt (varietà contenente tutti i possibili punti x, y, z, t)

La nozione chiave di invariante era il cuore della presentazione della relatività speciale di Minkowski. Il più semplice invariante è la metrica quadrimensionale dello spazio-tempo. Una particella in moto traslatorio uniforme descrive una *linea d'universo*, il cui elemento infinitesimo, in qualsiasi sistema di riferimento, è descritta da $d\tau = 1/c(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2}$ (con τ tempo proprio). Minkowski parlava della "completa trasformazione della nostra rappresentazione dello spazio e del tempo che deve essere di eccezionale interesse per il matematico... praticamente il più grande trionfo della matematica applicata che si sia mai visto...".

L'originalità del suo contributo risiede nella richiesta che tutte le leggi fisiche siano invarianti del gruppo di Lorentz nello spazio-tempo a quattro dimensioni. Secondo il suo ragionamento, tutti i 4-vettori velocità giacciono sulla superficie $(w_1)^2 - (w_2)^2 - (w_3)^2 - (w_4)^2 = 1$ che egli chiamò iperboloide 4-dimensionale: "Le trasformazioni di cui ho parlato diventano le trasformazioni di questo iperboloide 4-dimensionale...".

La geometria dei 4-vettori di Minkowski definita sulla superficie dell'iperboloide dalle trasformazioni del gruppo di Lorents, può essere vista come una geometria nel senso del *Programma di Erlangen* di Klein.

Secondo Klein la relatività speciale poteva infatti essere interpretata come la *Invariantentheorie* del gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Nei suoi sforzi di mettere in luce le connessioni tra il suo *Programma di Erlangen* e il lavoro di Minkowski, Einstein, Hilbert e gli altri, Klein tenne lezioni sulla teoria della relatività dall'estate 1916 all'estate 1917.

Digressione sulle notazioni

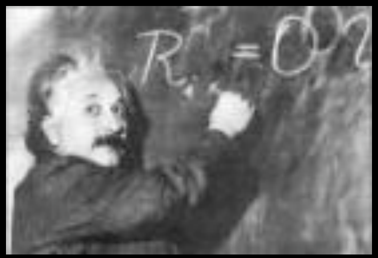
“Dans les sciences mathématiques une bonne notation a la même importance philosophique qu’une bonne classification a dans les sciences naturelles” (Henri Poincaré)

Dirac, che considerava la questione delle notazioni come un aspetto importante della fisica, e inventò nuovi termini e simboli, scrisse nel 1939:
“In mathematical theories the question of notation, while not of primary importance, is yet worthy of careful consideration, since a good notation can be of great valu e in helping the development of a theory. . . ”

Jungnickel e McCormmach sottolineano come la sequenza delle pubblicazioni di Einstein possa essere utilizzata per seguire la traccia di una crescente compattezza della fisica matematica nel XX secolo. Nel 1905 Einstein scriveva le equazioni di Maxwell à la Hertz, 8 equazioni in tutto. Nel 1908 era in grado di scrivere 4 equazioni usando una notazione vettoriale tridimensionale insieme alle operazioni vettoriali di rotore e divergenza. Nel 1916 le scrisse come due equazioni tensoriali a quattro dimensioni, dove le componenti $F_{\mu\nu}$ corrispondevano al campo magnetico ed elettrico e le $J_{\mu\nu}$ alle cariche e correnti.

Nella cosiddetta Entwurf *Theorie del 1913,* Einstein e Grossmann, nel presentare i meodi del calcolo differenziale assoluto, sottolinearono come queste tecniche fossero una naturale generalizzazione dei metodi dell’analisi vettoriale sviluppata da Minkowski, Sommerfeld e von Laue per la relatività speciale. Quando quest’ultimo pubblicò nel 1921 il suo libro sulla relatività (Die Relativitätstheorie, zweiter Band: Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft) si basò pesantemente sui lavori dei matematici, in particolare sulle lezioni non pubblicate di Hilbert sui fondamenti della fisica del 1916-1917.

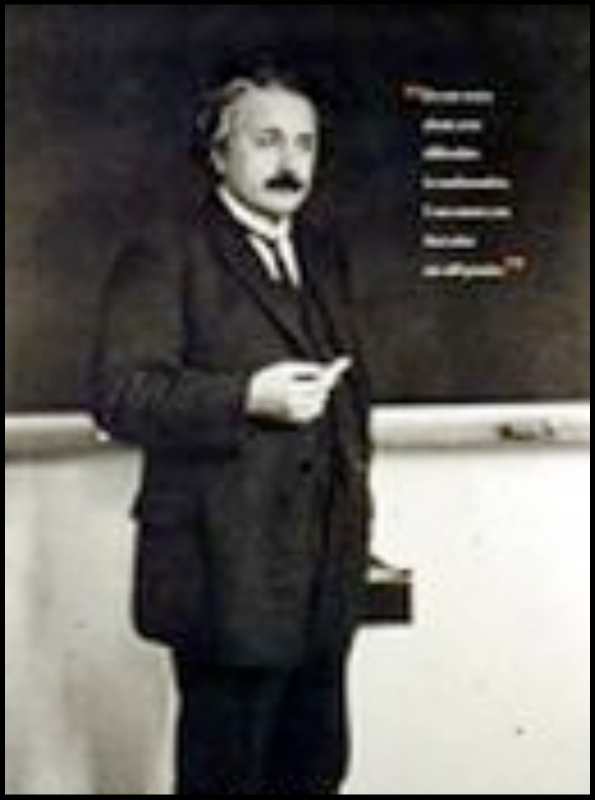
Einstein a Göttingen



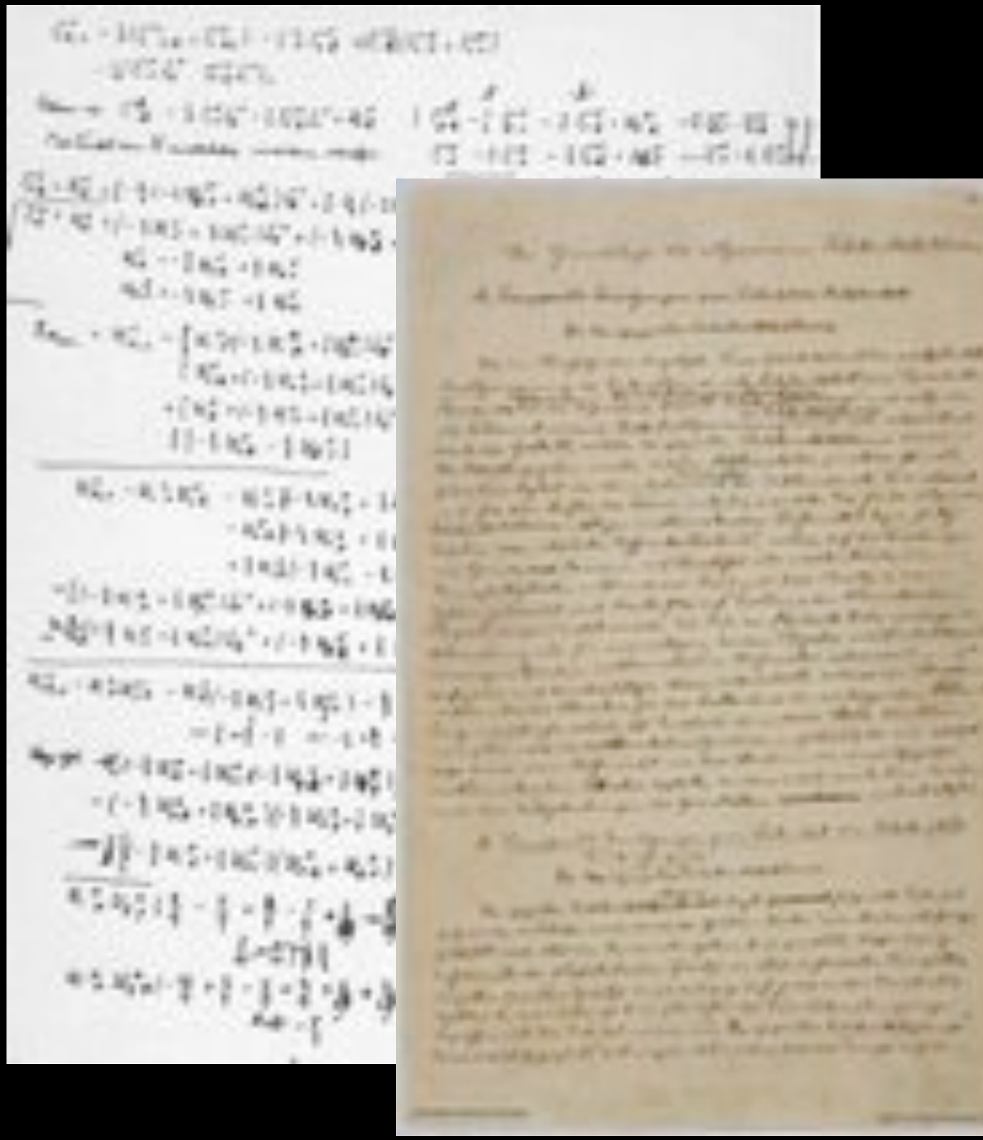
Bonolis AIF 2009

Dal 29 giugno al 7 luglio 1915 Einstein è invitato dai matematici a tenere 6 seminari sullo stato delle sue ricerche su relatività e gravitazione.

Einstein a Sommerfeld (1912)
Una cosa è certa, in tutta la mia vita non ho mai lavorato tanto duramente, e l'animo mi si è riempito di un sacro rispetto per la matematica, le parti più sottili della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un inutile orpello.



Qui avuto la piacevole esperienza di convincere completamente i matematici... Non c'è paragone tra Berlino e Göttingen quanto a vivacità e interesse accademico, almeno in questo campo.



Emmy Noether a Ernst S. Fischer (novembre 1915):
La teoria degli invarianti qui va per la maggiore; perfino Hertz, un fisico, sta studiando il Gordan-Kerschensteiner; la prossima settimana Hilbert terrà un seminario sui suoi invarianti differenziali di Einstein; a quel punto la gente a Göttingen ne dovrà sapere qualcosa di tutta la faccenda

D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (20 novembre 1915)

A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* (25 novembre 1915)

Hilbert e il miraggio di assiomatizzare la fisica

Bonolis AIF 2009

David Hilbert:

Physics is too difficult for physicists...

1900 L'assiomatizzazione della fisica è il 6° dei 23 problemi proposti da Hilbert al Congresso di Parigi

1912-1914 Hilbert completa il suo lavoro sulla teoria delle equazioni integrali (spazio di Hilbert)

1915-1917 Prima e seconda edizione dei *Grundlagen der Physik*

Hermann Weyl:

Men like Einstein or Niels Bohr grope their way in the dark toward their conceptions of general relativityor atomic structure by another type of experience and imagination than those of the mathematician, although no doubt mathematics is an essential ingredient.

Albert Einstein:

La gente di Göttingen qualche volta mi sorprende. Sembra che, invece di cercare di sistematizzare la fisica con la matematica, cerchino piuttosto di mostrare la loro abilità ai fisici

Sommerfeld ai nuovi studenti di fisica:
Attenzione! Struttura pericolante! Chiusura temporanea per completa ristrutturazione!

Hermann Weyl su Hilbert:

The maze of experimental facts which the physicists has to take into account is too manifold, their expansion too fast, and their aspect and relative weight too changeable for the axiomatic method to find a firm enouch foothold, except in the thoroughly consolidated parts of our physicsl knowledge... Thus Hilbert's vast plans in physics never matured.

La simmetria delle leggi

Invitata da Hilbert e Klein come una esperta della teoria degli invarianti, Emmy Noether si trova a Göttingen fin dall'aprile 1915.

Il 20 luglio 1915 Noether fa richiesta per l'abilitazione all'insegnamento, che nessuna donna aveva ancora ottenuto in Germania. Nonostante i loro sforzi il Ministero dopo due anni rispose: "Non si possono concedere eccezioni, anche si in un caso coì particolare in cui l'eccezione è innegabile."

Hilbert risolse il problema a modo suo. Nel semestre invernale 1916-1917 la Noether tenne lezioni sulla teoria degli invarianti, annunciate con il nome del prof. Hilbert.

Klein nutriva un forte interesse per questi argomenti. Interesse che scaturiva dall'individuare una correlazione fra le idee alla base della teoria speciale e generale della relatività e il suo *Programma di Erlangen*, vero e proprio manifesto sull'importanza dei gruppi di trasformazioni e dei loro invarianti per la geometria. Il tutto si integrava con la sua grande ammirazione per Riemann, che Klein vedeva così soprendentemente giustificata dalla teoria di Einstein sulla gravitazione.

La connessione fra le leggi di conservazione della meccanica classica e le corrispondenti simmetrie dello spazio tempo erano da diversi anni al centro degli interessi di Klein, come si deduce dal testo delle conferenze da lui tenute negli anni 1915-1917 sugli sviluppi della matematica nel XIX secolo.

Nel frattempo Hilbert continuava ad occuparsi di relatività generale e in particolare dell'apparente venir meno delle leggi di conservazione dell'energia-impulso.

Entrambi chiesero a Emmy Noether di assisterli in questa questione.

I teoremi di Noether

24 maggio 1918, Einstein a Hilbert:

Ieri ho ricevuto dalla signorina Noether un lavoro molto interessante sugli invarianti. Mi impressiona molto il fatto che qualcuno riesca a comprendere questioni di questo tipo da un punto di vista così generale. Non sarebbe stato male mandare la vecchia guardia di Göttingen a scuola da Fräulein Noether. Di sicuro conosce bene il suo mestiere.

2 luglio 1918: Felix Klein presenta all'Accademia Reale delle Scienze di Göttingen il lavoro di Noether *Invariante Variationsprobleme*. Vi si presentavano due teoremi e i loro inversi che rivelavano nel modo più generale la connessione tra simmetrie e leggi di conservazione in fisica, generalizzando una serie di risultati ottenuti in epoche diverse a tutti i gruppi continui finiti e infiniti. Questo lavoro rappresentava la sua tesi di abilitazione.


13. Invariante Variationsprobleme

I teoremi di Noether

Legame tra contenuto delle leggi fisiche e struttura dello spazio-tempo

Ciascun principio di conservazione di una quantità fisica si basa sull'invarianza formale delle leggi. Per ciascuna simmetria continua o discreta della funzione di Lagrange che rappresent il sistema fisico, esiste una quantità che si conserva nel corso dell'evoluzione del sistema. Nel caso delle trasformazioni euclidee il teorema fornisce la conservazione dell'energia totale, dell'impulso e del momento angolare in corrispondenza dell'invarianza della lagrangiana per traslazione temporale, spaziale, rotazione. I tre grandi principi di conservazione della fisica si basano ciascuno su una ben precisa simmetria dello spazio-tempo.

Il lavoro incorporava in modo inedito differenti campi della matematica e della fisica matematica:

1) La teoria degli invarianti algebrici e differenziali

2) La geometria di Riemann e il calcolo delle variazioni nel contesto della relatività generale, della meccanica e della teoria dei campi

3) La teoria dei gruppi, in particolare la teoria dei *gruppi di Lie* per risolvere le equazioni differenziali per mezzo dei loro gruppi di invarianza.

Il primo teorema di Noether contiene la derivazione delle 10 leggi classiche di conservazione della meccanica già scoperte da Joseph Louis Lagrange (1736-1813), William Rowan Hamilton (1805-1865) e Carl Gustav Jacobi (1804-1851).

Nel 1890 Poincaré aveva messo in evidenza, senza dimostrarla esplicitamente, la connessione fra invarianza delle equazioni de moto sotto traslazioni spaziali e temporali, rotazioni e trasformazioni di Galilei, la conservazione dell'energia, dell'impulso, del momento angolare e del moto uniforme del centro di massa.Nel 1911 Klein si era reso conto che la connessione fra proprietà di simmetria di un sistema e le sue leggi di conservazione è correlata al lavoro di Lie sulla teoria dei gruppi applicata alle equazioni differenziali.

Su suggerimento di Lie, Friedrich Engel (studente e collaboratore di Lie) aveva mostrato nel 1916 la connessione fra gruppo di invarianza della meccanica classica e le leggi di conservazione della quantità di moto, del momento angolare e della velocità del baricentro in un caso particolare e nell'ambito della teoria di Lie.

Queste ricerche estendevano alla meccanica galileiana e relativistica il punto di vista che Klein aveva già applicato con successo alla geometria.

I principi della meccanica hanno un'origine gruppale

Sophus Lie

Il potere della matematica

Il **Teorema I** riguarda le simmetrie descritte da gruppi di Lie finito-dimensionali, come il gruppo delle rotazioni, il gruppo di Lorentz, cioè gruppi di Lie con un numero finito N di generatori infinitesimi linearmente indipendenti. Se il sistema è invariante rispetto al gruppo, esiste una quantità conservata corrispondente a ciascun elemento dell'algebra di Lie che ha come elementi i generatori del gruppo. Per una teoria di campo il teorema I afferma che esiste una corrente localmente conservata per ciascun elemento dell'algebra.

Questo risultato molto generale è valido per sistemi discreti, continui, classici e quantistici.

Il **Teorema II** si applica ai gruppi di Lie infinito-dimensionali come per esempio il gruppo dei diffeomorfismi della relatività generale. In questo caso si ottiene la legge di conservazione dell'energia-impulso come conseguenza della invarianza del sistema generale di coordinate della teoria (le 4 identità di Bianchi).

Altri esempi sono i gruppi di gauge SU(3) e U(1) di QCD e QED rispettivamente.

I ragazzi della Noether

Nel 1932, quando Emmy Noether prese la parola al Congresso Internazionale dei Matematici di Zurigo, i suoi contributi allo studio dell'algebra erano riconosciuti come fondamentali: basti pensare che due anni prima uno dei suoi migliori allievi, Bartel Leender van der Waerden, dava alle stampe il volume *Moderne Algebra*, in gran parte basato sulle idee innovative di Emmy, oggi divenuto un classico e che può essere considerato come l'atto d'inizio dell'algebra moderna.

Emmy Noether e M. L. Dubreil a Göttingen nella primavera del 1931N. Heilbronn


Il *triumvirato* di Göttingen
Hilbert, Born e Franck

IL FESTIVAL DI BOHR. Nel giugno 1922, Bohr, che quello stesso anno avrebbe ricevuto il premio Nobel, tenne una serie di conferenze generali sulla fisica atomica quantistica a teorici tedeschi e a loro studenti riuniti a Göttingen. Bohr era contrario al clima di boicottaggio culturale internazionale contro la Germania. Primo incontro con Heisenberg.

L'evento rappresenta l'inaugurazione non ufficiale di Göttingen come centro di fisica atomica teorica e terzo punto del triangolo quantistico con Monaco e Copenhagen.

Max Born si spostò a Göttingen nel 1921 come successore di Peter Debye. Heisenberg arrivò a Göttingen verso la fine dell'ottobre 1922, per l'inizio del semestre invernale.




David Hilbert e Richard Courant, *Methoden der mathematischen Physik* (1924). Due volumi di circa 1000 pagine a cui collaborarono in molti (tra cui in particolare Pasqual Jordan). Il secondo volume è dedicato alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. La formulazione di Schrödinger della meccanica quantistica rese evidente la rilevanza delle tecniche di Hilbert e Courant per la meccanica ondulatoria.

Il seminario, che era stato frequentato da Poincaré, Lorentz, Planck, Nernst, Bohr, ora era il luogo di richiamo per una nuova generazione di fisici come Dirac, Heisenberg, Pauli, Fermi, Oppenheimer.




Pascual Jordan
(1902-1980)

John von Neumann
(1903-1957)

Le ultime lezioni di Hilbert sugli sviluppi della meccanica quantistica tenute nel 1926-1927 furono raccolte nel volume *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* (1927) a cui collaborò von Neumann.

Le lezioni di Hilbert
fisica e conoscenza

Meccanica e Geometria
Meccanica
Meccanica dei mezzi continui
Idromeccanica
Meccanica statistica
Teoria cinetica dei gas
Teoria della radiazione
Teoria degli elettroni
Oscillazioni elettromagnetiche
Teoria molecolare della materia
Fondamenti della fisica
Teoria della relatività
Meccanica quantistica

- L'unità delle conoscenze sulla natura
- Metodi di pensiero nelle scienze esatte
- Scienze naturali e matematica
- Introduzione alla filosofia sulla base delle moderne scienze naturali

1933

November 11, 1938
An estimated 2,000 - 2,500 Jews died as a result of Kristallnacht (murdered during the pogroms or death in transit to concentration camps); some were beaten to death.
30,000 Jews were abducted to concentration camps.
8,000 Jewish shops, windows smashed with sledgehammers leaving the streets covered with glass.
1,668 synagogues were ransacked; 267 were destroyed by fire.
The Jews were fined 1 billion reichsmarks to repair the property damage and restore cleanliness to the German streets.

Bonolis AIF 2009

Emmy Noether alla stazione di Göttingen nell'ottobre 1933, al momento della sua emigrazione negli Stati Uniti.

Hilbert al ministro dell'educazione: ...*Matematica? A Göttingen non esiste più...*

Il contributo di Hermann Weyl alla fisica

1904-1908 Studia a Göttingen matematica e fisica sotto la supervisione di Hilbert con cui consegue il dottorato.

1913 Dopo aver insegnato a Göttingen, a 27 anni ottiene una cattedra alla Eidgenössische Technische Hochschule Zurigo, dove Einstein era professore di fisica, e stava sviluppando la teoria generale della relatività. Quell'anno Weyl pubblica L'idea di Riemann della superficie, una trattazione sistematica e fondamentale dell'argomento.

1918 Pubblica *Raum, Zeit, Materie* e *Gravitation und Elektrizität*

1928 *Gruppentheorie und Quantenmechanik* la prima "bibbia" sull'applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica

1929 *Elektron und Gravitation*

Nel 1918, nel suo lavoro *Gravitazione ed Elettricità,* Weyl fece un tentativo di connettere la conservazione della carica elettrica con la simmetria di gauge in modo da produrre una teoria unificata di elettromagnetismo e gravitazione generalizzando la geometria su cui è basata la relatività generale.

Il tentativo fallì, ma nel 1929, in *Elettrone* e *Gravitazione,* Weyl riapplicò l'idea nel contesto della teoria quantistica applicandola ad una teoria unficata di materia ed elettromagnetismo.

Weyl mise così in circolazione il "principio di gauge" che nelle mani dei fisici si è trasformato in un potente strumento nella seconda metà del Novecento.

Hermann Weyl
1885- 1955

Amico personale di Schrödinger, Weyl lascia Zurigo nel 1930 per diventare successore di Hilbert a Göttingen.

Nel 1933, con l'avvento di Hitler, Weyl (sua moglie era ebrea) si trasferisce a Princeton dove ritrova Einstein, che da tempo aveva ben compreso in che direzione stesse andando la Germania.